2 Robinson–Schensted–Knuth 対応

順列 w が 2143-回避だとは限らない一般の場合では, hook length 公式の非負係数一次結合によって w を実現するようなあみだくじの個数が求まる. この事実は Edelman–Greene の結果を柏原クリスタル[*1]を用いて解釈し直した Morse–Schilling の結果により俯瞰的に説明される.

• 2-1：半標準盤

Young 図形 $\lambda \vdash n$ の標準盤とは, 各箱に 1 から n を一つずつ, 左から右へ, 上から下へ狭義の単調増加になるように書き加えたものであった. この条件を少し緩めて, 半標準盤と呼ばれるものを導入しよう.

定義 2.1. 自然数 d を固定する. 高々 d 行の Young 図形 λ の各箱に 1 から d の数字を次のルールで書き込んだものを λ の **半標準盤 (semi-standard tableaux)** という.

- 1 から d までの数を書き込む. 同じ数字を複数回用いても良い.
- 書き込まれる数は, 各行は左から右に広義単調増加, 各列は上から下へ狭義単調増加である. ここで, 数列 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ が広義単調増加であるとは $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, 狭義単調増加であるとは $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ を満たすことである.

λ から定まる半標準盤すべての集合を $\mathsf{SST}(\lambda)$ と表す.

例 2-1　$d = 2$ とすると, $\lambda = (3, 1)$ の半標準盤は以下の 3 個で尽くされる.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

• 2-2：Robinson–Schensted–Knuth 対応

与えられた半標準盤 T から, 箱をひとつ増やすような新たな半標準盤を得る操作を定義しよう.

定義 2.2. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ を Young 図形とする. 半標準盤 $T \in \mathsf{SST}(\lambda)$ に対する $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ の **Schensted の行挿入 (Schensted row insertion)** または **バンプ (Bumping)** $T \leftarrow i$ とは, 次の規則で計算される半標準盤である.

(i) $a = 1$, $b = i$ と初期化する.

(ii) T の第 a 行めに書き込まれている数字が左から $t_{a,1} \leq t_{a,2} \leq \cdots \leq t_{a,\lambda_a}$ とする.

(ii-1) $t_{a,\lambda_a} \leq b$ ならば, T の第 a 行目を $t_{a,1} \leq t_{a,2} \leq \cdots \leq t_{a,\lambda_a} \leq b$ として終了する.

(ii-2) $t_{a,\lambda_a} > b$ ならば, $t_{a,s-1} \leq b < t_{a,s}$ となるような $t_{a,s}$ をひとつとり, T の第 a 行目を

$$t_{a,1} \leq \cdots \leq t_{a,s-1} \leq b \leq t_{a,s+1} \leq \cdots \leq t_{a,\lambda_a}$$

と更新し, a を $a+1$ に, b を $t_{a,s}$ と更新して (ii) に戻る.

(iii) $\varnothing \leftarrow i = \boxed{i}$ と定める.

[*1] 柏原 正樹先生は日本人で初めてアーベル賞を受賞した数学者である.

例 2-2　$\lambda = (4,3,1,1)$ として, $T \in \mathsf{SST}(\lambda)$ を次のように取る.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 3 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

これに対して, $T \leftarrow 2$ を計算してみよう. まず, $a = 1$, $b = 2$ と初期化すると, 1 行目は $1 \leq 2 \leq 2 < 3$ だからこれを

$$1 \leq 2 \leq 2 \leq 2$$

と書き換えて, $a = 2$, $b = 3$ に更新する. 次に 2 行目は $2 \leq 3 \leq 4$ だからこれを

$$2 \leq 3 \leq 3$$

と書き換えて, $a = 3$, $b = 4$ に更新する. 次に 3 行目は 3 だから 3 行目を

$$3 \leq 4$$

として終了する. すなわち,

$$T \leftarrow 2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 3 & 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 4 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

となる.

以下, 自然数 d に対して, $[d] := \{1, 2, \ldots, d\}$ とおく. また, $[d]^{\times k}$ で集合 $[d]$ の k 個の直積を表す.

定義 2.3. $w = (w_1, \ldots, w_n) \in [d]^{\times n}$ に対して,

$$P(w) = \varnothing \leftarrow w_1 \leftarrow w_2 \leftarrow \cdots \leftarrow w_n$$

を w の **P-シンボル（P-symbol）** という. これに付随して $P(w)$ が Young 図形 λ_n の半標準盤ならば, Young 図形の増加列

$$\varnothing \subset \lambda_1 \subset \cdots \subset \lambda_n =: \lambda$$

が得られるので, 増加列に合わせて $1, \ldots, n$ を順に書き込んで標準盤を得る. この標準盤を $Q(w)$ と表わし, w の **Q-シンボル（Q-symbol）** と呼ぶ.

例 2-3　$w = (1,2,3,1,2,1,3)$ に対して，$P(w)$ と $Q(w)$ を求めてみよう．

$$
\begin{aligned}
P(w) &= \varnothing \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\
&= \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\
&= \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau} \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\
&= \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \end{ytableau} \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\
&= \begin{ytableau} 1 & 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau} \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\
&= \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{ytableau} \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\
&= \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 \end{ytableau} \leftarrow 3 \\
&= \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 \end{ytableau}
\end{aligned}
$$

箱の増え方をレコードしたのが $Q(w)$ なので，

$$
Q(w) = \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 \\ 6 \end{ytableau}
$$

である．

以上の準備のもと，Robinson–Schensted–Knuth 対応（RSK 対応）の主張を述べよう．これは，古典的な Robinson–Schensted 対応（RS 対応）と呼ばれる「順列」と「標準盤のペア」との間にある全単射対応をより一般のかたちにしたものである．

定理 2.4 (Robinson–Schensted–Knuth 対応)**.** **RSK 対応 (RSK correspondence)** と呼ばれる次の対応は全単射である．

$$
[d]^{\times n} \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash n,\ \ell(\lambda) \le d} \mathsf{SST}(\lambda) \times \mathsf{ST}(\lambda); \qquad w \longmapsto (P(w), Q(w))
$$

特に，これを順列に制限すれば，次の対応は全単射である．

$$
S_n \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \mathsf{ST}(\lambda) \times \mathsf{ST}(\lambda); \qquad w \longmapsto (P(w), Q(w))
$$

この対応は **RS 対応 (RS correspondence)** という．

• 2-3： 文字列と基本変換

$[d]$ の元をいくつか用いて一列に並べた $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ を **長さ n の文字列 (string of length n)** という．文字列 w と w' に対して，その連接を ww' とかく．長さ 0 の文字列を **空文 (empty string)** といい，ε とかく．

$T \in \mathsf{SST}(\lambda)$ に対して，T の最下行から左から右へ，下から上へ読み，箱に書かれている文字を並べた文字列を $w(T)$ と書いて，これを **T の語 (word of T)** という．$w(T)$ を表すとき，行に対応するワードを (　) でく

くってもよい．このとき, (　) に現れる文字列は単調増加列である．

例 2-4　半標準盤 T が

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 5 \\ \cline{1-4} 3 & 4 & 4 \\ \cline{1-3} 5 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

とすれば, $w_T = 55344223511234 = (55)(344)(2235)(11234)$ である．

では, バンプを行えば, 対応する文字列たちはどのように変化するだろうか．すなわち, $w(T \leftarrow x)$ と $w(T)$ の間にどのような関係があるだろうか．

文字 x を j 行目に挿入する事を考える．対応する j 行目のワードが $ux'v$（ただし, u, v は文字列, x' は文字であり, u に含まれるどの文字も x 以下かつ $x < x'$ である）としよう．このとき, j 行目のワードは uxv に置き換わり, x' が $j+1$ 行目に挿入されていく．結果として,

$$(ux'v) \cdot x \longmapsto x' \cdot (uxv)$$

というワードが得られる．

例 2-5　$w(T) = (56)(446)(2355)(1224)$ とするとき, $T \leftarrow 3$ を計算すると

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \cline{1-3} 5 & 6 \\ \cline{1-2} \end{array} \leftarrow 3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \cline{1-3} 5 & 6 \\ \cline{1-2} \end{array} \leftarrow 4 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \cline{1-3} 5 & 6 \\ \cline{1-2} \end{array} \leftarrow 5 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 5 \\ \cline{1-3} 5 & 6 \\ \cline{1-2} \end{array} \leftarrow 6 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 5 \\ \cline{1-4} 5 & 6 & 6 \\ \cline{1-3} \end{array}$$

なので, ワードが変化する様子をみれば

$$\begin{aligned}(56)(446)(2355)(1224) \cdot 3 &\mapsto (56)(446)(2355) \cdot 4 \cdot (1223) \mapsto (56)(446) \cdot 5 \cdot (2345)(1223) \\ &\mapsto (56) \cdot 6 \cdot (445)(2345)(1223) \mapsto (566)(445)(2345)(1223)\end{aligned}$$

ワードの変化を一文字の移動をひとつずつ細かく見ていけば, 以下のルールで行われていることに気づく．

① $x < y \leq z$ ならば, $yzx \longmapsto yxz \cdots\cdots$ 右端が一番小さいなら, それを左にひとつ移動する．
② $x \leq y < z$ ならば, $xzy \longmapsto zxy \cdots\cdots$ 真ん中が一番大きいなら, それを左にひとつ移動する．

$$(2355)4 \overset{①}{\longmapsto} (23545) = (23545) \overset{②}{\longmapsto} (25345) = (25345) \overset{②}{\longmapsto} 5(2345) \dashrightarrow (446)5 \overset{②}{\longmapsto} (4645) \overset{②}{\longmapsto} 6(445) \dashrightarrow \cdots$$

定義 2.5. 文字列 w の中にある連続する 3 つの文字に対する変換①, ②およびそれらの逆の操作を **Knuth 変換 (Knuth transformation)** と呼ぶ． 2 つの文字列 w, w' が, 連続する Knuth 変換で移り合うとき, w と w' は **Knuth 同値 (Knuth equivalence)** と呼ぶ. Knuth 同値が定める最小の同値関係を $\sim_K$ で表し, $w \sim_K w'$ であるときに w と w' は同じ Knuth 同値類に属するという．

Greene–Fomin 理論によって, 次の Knuth の定理を示すことができる．

定理 2.6 (Knuth の定理)**.** $x \sim_K y$ であるための必要十分条件は, $P(x) = P(y)$ となることである．

課題 2-1　$\lambda = (3, 2, 1)$ の半標準準盤を全て求めよ.

課題 2-2　(1) $w = (5, 5, 3, 4, 2, 3, 5, 1, 1, 2, 3, 4)$ に対して, $P(w)$ と $Q(w)$ を求めよ.

(2) $\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \right) = (P(w), Q(w))$ となるような $w \in S_4$ を求めよ.

課題 2-3　$w \in S_n$ に対して, $P(w) \in \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \mathsf{SST}(\lambda)$ を対応させる写像は単射ではない. 単射ではない例を挙げよ.

課題 2-4　$w = 5152431245$ と $w' = 5415213245$ が同じ Knuth 同値類に属することを示せ.