4　Edelman–Greene 対応

RSK 対応とよく似た対応である Edelman–Greene 対応について述べよう．

• 4-1 : Edelman–Greene 対応

縦棒が n 本のあみだくじにおいて, $1 \le i \le n-1$ に対して s_i で縦棒 i と縦棒 $i+1$ をつなぐ横棒とおく．順列 $w \in S_n$ をあみだくじで実現するとき, 横棒が上から $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}$ であれば $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ と表すこととする．もし, $k = \mathsf{inv}(w)$ であるとき $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ を w の **簡約表示 (reduced expression)** といい, 語 $i_k i_{k-1} \cdots i_1$ を **簡約語 (reduced word)** と呼ぶ.

定義 4.1. $\lambda \vdash k$ とし, $T \in \mathsf{SST}(\lambda)$ のアラビア読みが $w \in S_n$ の簡約表示を与えているとする．また, $\mathsf{inv}(s_i w) = \mathsf{inv}(w)+1$ であると仮定する．このとき, **Edelman–Greene 挿入 (Edelman–Greene insertion)** $T \Leftarrow i$ とは, 次の規則で計算される半標準盤である.

(i) $a = 1$, $b = i$ と初期化する.

(ii) T の第 a 行めに書き込まれている数字が左から $t_{a,1} < t_{a,2} < \cdots < t_{a,\lambda_a}$ とする.

 (ii-1) $t_{a,\lambda_a} < b$ ならば, T の第 a 行目を $t_{a,1} < t_{a,2} < \cdots < t_{a,\lambda_a} < b$ として終了する.

 (ii-2) $t_{a,\lambda_a} > b$ ならば, $t_{a,s-1} \le b < t_{a,s}$ となるような $t_{a,s}$ をひとつとる.

  (a) $s \ge 2$ で $(t_{a,s-1}, t_{a,s}) = (b, b+1)$ ならば T を更新せずに, a を $a+1$ に, b を $b+1$ に更新して (ii) に戻る.

  (b) その他のとき, T の第 a 行目を

$$t_{a,1} < \cdots < t_{a,s-1} < b < t_{a,s+1} < \cdots < t_{a,\lambda_a}$$

  と更新し, a を $a+1$ に, b を $t_{a,s}$ と更新して (ii) に戻る.

(iii) $\varnothing \Leftarrow i = \boxed{i}$ と定める.

例 4-1　EG 挿入を計算してみよう．順列 $w = s_2 s_3 s_2 s_1 \in S_4$ の簡約語 1232 に対して $\varnothing \Leftarrow 1 \Leftarrow 2 \Leftarrow 3 \Leftarrow 2$ を求める．はじめの 3 回はいずれも行末に付け加わって

$$\varnothing \Leftarrow 1 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array}, \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} \Leftarrow 2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} \Leftarrow 3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}$$

となる．最後の $\Leftarrow 2$ では 1 行目 $1 < 2 < 3$ に $b = 2$ を挿入する．$t_{1,3} = 3 > 2$ かつ $t_{1,2} = 2 \le 2 < t_{1,3} = 3$ だから $s = 3$ であり, $(t_{1,2}, t_{1,3}) = (2,3) = (b, b+1)$ なので規則 (a) が適用される．すなわち 1 行目は $1 < 2 < 3$ のまま更新せず, b を $b+1 = 3$ に上げて 2 行目へ送り

$$\varnothing \Leftarrow 1 \Leftarrow 2 \Leftarrow 3 \Leftarrow 2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

を得る．Schensted 挿入 (第 2 回) ならば 3 が押し出されて 1 行目が 1 2 2 となるところを, EG 挿入は規則 (a) により 1 行目を 1 2 3 と保ったまま 3 を下段へ送る, という違いに注意せよ.

第 2 回の Schensted 挿入の代わりに EG 挿入を用いれば, 第 2 回と同様に簡約表示の P-シンボルと Q-シンボルが定まる．すなわち $w = s_{i_\ell} \cdots s_{i_1} \in S_n$ の簡約表示に対して, 半標準盤

$$P(w) = \varnothing \Leftarrow i_1 \Leftarrow i_2 \Leftarrow \cdots \Leftarrow i_\ell$$

を **P-シンボル（P-symbol）** と呼び, 箱が増えた順に $1, \ldots, \ell$ を記入して得られる標準盤を **Q-シンボル（Q-symbol）** $Q(w)$ と呼ぶ.

以上の準備のもと, Edelman–Greene 対応 (EG 対応) を述べよう．これは「順列の簡約表示」と「半標準盤と標準盤のペア」との間の全単射であり, 第 2 回の RSK 対応のちょうど簡約表示版にあたる.

定理 4.2 (Edelman–Greene 対応)**.** $w \in S_n$ の簡約表示全体のなす集合を $R(w)$ とする．このとき, EG 挿入が定める対応

$$R(w) \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash \mathsf{inv}(w)} \mathsf{SST}(w, \lambda) \times \mathsf{ST}(\lambda); \qquad s_{i_\ell} \cdots s_{i_1} \longmapsto (P(w), Q(w))$$

は全単射である．ここで $\mathsf{SST}(w, \lambda)$ とは, λ の半標準盤 T であって, そのアラビア読みを $j_\ell \cdots j_1$ とするとき $s_{j_\ell} \cdots s_{j_1}$ が w の簡約表示になるもの全体の集合である.

系. $a_{w,\lambda} := \sharp \mathsf{SST}(w, \lambda)$ とおくと, 順列 w を実現する横棒の本数が最小のあみだくじの個数は

$$\sum_{\lambda \vdash \mathsf{inv}(w)} a_{w,\lambda} \, f^\lambda$$

で与えられる．ここで $f^\lambda = \sharp \mathsf{ST}(\lambda)$ は第 1 回の hook 長公式で計算できる.

第 1 回で述べた「2143-回避 (vexillary) な w に対してあみだくじの個数が $f^{\lambda(w)}$ である」という事実は, この系の特別な場合である．実際, w が 2143-回避のときは $\lambda = \lambda(w)$ のただ一つだけが $a_{w,\lambda} = 1$ となり, 他の λ では $a_{w,\lambda} = 0$ となるからである.

例 4-2　第 1 回でも扱った $w = [4\ 1\ 3\ 2] = s_2 s_3 s_2 s_1 \in S_4$ を考える．$\mathsf{inv}(w) = 4$ であり, w の簡約表示は

$$s_2 s_3 s_2 s_1, \qquad s_3 s_2 s_3 s_1, \qquad s_3 s_2 s_1 s_3$$

の 3 個である．それぞれに EG 挿入を施すと, P-シンボルはすべて等しく (例 4-1 で $P(s_2 s_3 s_2 s_1)$ を計算した),

$$P(s_2 s_3 s_2 s_1) = P(s_3 s_2 s_3 s_1) = P(s_3 s_2 s_1 s_3) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

となる．一方 Q-シンボルはそれぞれ

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

となり, ちょうど $\lambda(w) = (3, 1)$ の標準盤 3 個が 1 回ずつ現れる．ゆえに $a_{w,(3,1)} = 1$, それ以外の λ では $a_{w,\lambda} = 0$ であり, あみだくじの個数は $f^{(3,1)} = 3$ に一致する．これは第 1 回で数えた個数に他ならない.

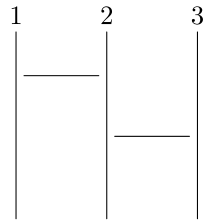
• 4-2：あみだくじの減少列分解

EG 対応の背後には, 第 3 回で学んだ柏原クリスタルの同型がひそんでいる．それを具体例で覗くために, あみだくじの「減少列分解」を導入しよう.

定義 4.3. あみだくじが **単調減少 (monotone decreasing)** とは, 次のいずれかをみたすときをいう.

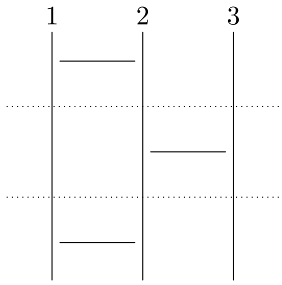
(a) 横棒がまったく存在しない.
(b) 横棒を上から順に読んだとき, 次の横棒がつねに直前の横棒より右側にある.

たとえば次のあみだくじは, 横棒が左上から右下へ移っていくので単調減少である.



定義 4.4. あみだくじの **長さ d の減少列分解 (decreasing decomposition)** $(A_1, \dots, A_d)$ とは, あみだくじの途中に $d-1$ 本の分離線を入れて, 上から順に単調減少あみだくじ $A_1, \dots, A_d$ の合成に分解したものをいう. 順列 w を与えるあみだくじの長さ d の減少列分解全体のなす集合を $B_d(w)$ と表す.

例 4-3　$w = [3\ 2\ 1] \in S_3$ を考える. $w = s_1 s_2 s_1$ のあみだくじ (3 本の横棒) に 2 本の分離線を入れて長さ 3 の減少列分解 $(s_1)(s_2)(s_1)$ をつくると, 各段はそれぞれ横棒 1 本で単調減少である.



同様に分離線の入れ方や横棒のまとめ方を変えると, $B_3(w)$ は全部で 8 個あり, 各段を簡約表示で書けば

$$\begin{array}{lll} (s_1)(s_2)(s_1), & (s_2)(s_1)(s_2), & \\ (s_1)(s_2s_1)(\,), & (s_1)(\,)(s_2s_1), & (\,)(s_1)(s_2s_1), \\ (s_2s_1)(s_2)(\,), & (s_2s_1)(\,)(s_2), & (\,)(s_2s_1)(s_2) \end{array}$$

である (空の段は横棒なしの単調減少あみだくじ).

この個数 8 は, 表現論の量とぴたりと一致する. 複素一般線型群 $\mathsf{GL}_3(\mathbb{C})$ の最高重み λ の既約表現 $W(\lambda)$ の次元は, Weyl 次元公式

$$\dim W(\lambda) = \prod_{x \in \lambda} \frac{d + c(x)}{h(x)} = \sharp \mathsf{SST}(\lambda)$$

で与えられる (ここで i 行 j 列の箱 x に対し $c(x) := j - i$, $h(x)$ はフック長, $d = 3$). $\lambda = \lambda(w) = (2,1)$ では, 各箱に $d + c(x) = 3 - i + j$ とフック長を書き込むと

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \text{および} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

であるから

$$\dim W((2,1)) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 8$$

となり, $\sharp B_3(w) = 8$ にちょうど一致する.

• 4-3： クリスタル同型としての EG 対応 (EGMS 対応)

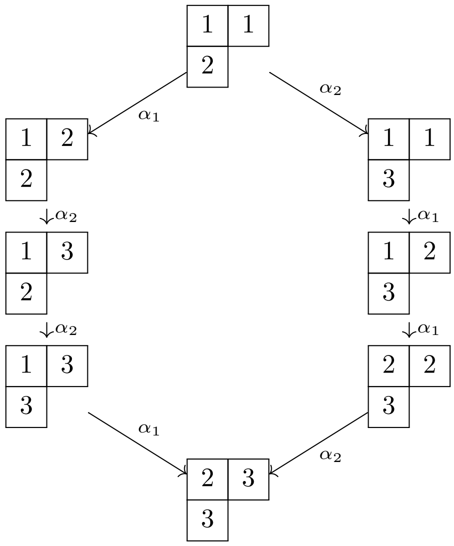
この一致は偶然ではなく, 背後に柏原クリスタルの同型がある. 次は Morse–Schilling による (証明は割愛する).

定理 4.5 (Morse–Schilling)**.** $B_d(w)$ を頂点集合とする正規柏原クリスタルが存在する．とくに w が vexillary(2143-回避) ならば, GL_d のクリスタルとして

$$B_d(w) \;\cong\; \mathbb{B}(\lambda(w))$$

が成り立つ.

例 4-3 の $w = 321$ では $\lambda(w) = (2, 1)$ で, $B_3(321) \cong \mathbb{B}((2, 1))$ である．右辺は第 3 回で学んだ GL_3 の最高重み $(2, 1)$ のクリスタル, すなわち成分 $[3]$ の半標準盤 8 個を頂点とし, f_i で「一番右の i を $i+1$ に変える」型の彩色矢印を入れたもので, 次の形をしている.



(8 頂点をもつこのクリスタルは, ちょうど GL_3 の随伴表現に対応する.)

この同型を, 第 2 回の RSK 対応 (RS 対応の一般化) になぞらえて簡約表示の側から実現したものが EGMS 対応である．RS 対応が RSK 対応へ拡張されたように, EG 対応は EGMS 対応へ拡張される.

定義 4.6. $w = w^{(d)} \cdots w^{(1)}$ を $B_d(w)$ の元 (長さ d の減少列分解) とする．**EGMS 対応 (EGMS correspondence)** による像 (P, Q) を次で定める.

(i) $(P^{(0)}, Q^{(0)}) = (\varnothing, \varnothing)$ とおく.
(ii) $w^{(i)} = s_{i_s} \cdots s_{i_1}$ のとき, EG 挿入で $P^{(i)} = P^{(i-1)} \Leftarrow i_1 \Leftarrow \cdots \Leftarrow i_s$ とする.
(iii) $Q^{(i)}$ を, $Q^{(i)}/Q^{(i-1)}$ が $P^{(i)}/P^{(i-1)}$ と同じ形になるように取り, 増えた箱すべてに i を書き込む.

そして $(P, Q) := (P^{(d)}, Q^{(d)})$ と定める.

定理 4.7 (Morse–Schilling)**.** EGMS 対応は正規柏原クリスタルの同型

$$\Psi_{\mathrm{EGMS}} :\; B_d(w) \;\cong\; \bigsqcup_{\lambda \vdash \mathsf{inv}(w)} \mathsf{SST}(w, \lambda) \times \mathbb{B}(\lambda)$$

を与える．とくに $d = \mathsf{inv}(w)$ ととって重み $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_d$ の元 (各段が横棒 1 本) に制限すると, $\mathbb{B}(\lambda)$ の部分が標準盤に化けて, 定理 4.2 の EG 対応 $R(w) \cong \bigsqcup_\lambda \mathsf{SST}(w, \lambda) \times \mathsf{ST}(\lambda)$ が得られる.

例 4-4　$w = 321$ の減少列分解に EGMS 対応を施そう．たとえば $(\,)(s_1)(s_2 s_1)$ では, $w^{(1)} = s_2 s_1$, $w^{(2)} = s_1$, $w^{(3)} = (\,)$ だから, $w^{(1)}$ から順に

$$P^{(1)} = \varnothing \Leftarrow 1 \Leftarrow 2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}\,, \quad P^{(2)} = P^{(1)} \Leftarrow 1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}\,, \quad P^{(3)} = P^{(2)}$$

となり ($w^{(2)} = s_1$ の挿入では規則 (a) が働く), 箱の増えた段を記録して

$$Q = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

を得る (1 行目の 2 箱は第 1 段で, 下段の 1 箱は第 2 段で増えた). P はつねに EG の P-シンボル $\begin{smallmatrix}1&2\\2&\end{smallmatrix}$ に等しく, Q を 8 個の減少列分解すべてについて計算すると, ちょうど $\lambda(w) = (2,1)$ の半標準盤 8 枚を一回ずつ与える:

減少列分解	Q	減少列分解	Q
$()(s_2s_1)(s_2)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&2\\ \hline 2& \\ \cline{1-1}\end{array}$	$()(s_1)(s_2s_1)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&1\\ \hline 2& \\ \cline{1-1}\end{array}$
$(s_1)(s_2)(s_1)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&2\\ \hline 3& \\ \cline{1-1}\end{array}$	$(s_1)()(s_2s_1)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&1\\ \hline 3& \\ \cline{1-1}\end{array}$
$(s_2)(s_1)(s_2)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\ \hline 2& \\ \cline{1-1}\end{array}$	$(s_1)(s_2s_1)()$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2&2\\ \hline 3& \\ \cline{1-1}\end{array}$
$(s_2s_1)()(s_2)$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\ \hline 3& \\ \cline{1-1}\end{array}$	$(s_2s_1)(s_2)()$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2&3\\ \hline 3& \\ \cline{1-1}\end{array}$

こうして $B_3(321) \cong \{P\} \times \mathbb{B}((2,1)) \cong \mathbb{B}((2,1))$ が, クリスタルの同型として目に見える形で実現された.

• まとめ

Morse–Schilling の仕事によって, あみだくじもまた柏原クリスタルという表現論の話であることがわかった. 第 1 回の「あみだくじの個数」から出発し, 第 2 回の RSK 対応, 第 3 回の柏原クリスタル, そして本回の EG 対応・EGMS 対応へと, 一見ばらばらに見えた話題が一本の糸でつながっている. 対称群や Hecke 代数のモジュラー表現論など, 柏原クリスタルで理解される分野は今も増えつつある. 組合せ論的表現論の題材は他にもあるが, そのおもしろさが少しでも伝われば幸いである.

課題 4-1　$\varnothing \Leftarrow 1 \Leftarrow 3 \Leftarrow 2 \Leftarrow 3$(すなわち $P(s_3s_2s_3s_1)$) を EG 挿入で計算し, 例 4-2 の P-シンボルと一致することを確かめよ. また規則 (b) が使われる箇所を述べよ.

課題 4-2　$w = [3\ 2\ 1] \in S_3$ の簡約表示をすべて求め (第 1 回 例 1-1 参照), それぞれの P-シンボルと Q-シンボルを EG 挿入で計算せよ. さらに $\lambda(w)$ と $f^{\lambda(w)}$ を求め, 第 1 回で数えたあみだくじの個数と一致することを確かめよ.

課題 4-3　$w = [2\ 1\ 4\ 3] \in S_4$ は 2143-回避でない. w の 2 個の簡約表示 s_1s_3, s_3s_1 の P-シンボルを計算し, それらの形が (2) と $(1,1)$ で<u>異なる</u>ことを確かめよ. これより $\sum_\lambda a_{w,\lambda} f^\lambda = 2$ である一方 $f^{\lambda(w)} = f^{(1,1)} = 1$ であり, 両者が一致しないこと (第 1 回 課題 1-4) を説明せよ.

課題 4-4　Weyl 次元公式を用いて, GL_3 の最高重み $\lambda = (2,2)$ の既約表現の次元 $\dim W((2,2)) = \sharp\mathsf{SST}((2,2))$ を計算せよ (各箱に $3 + c(x)$ とフック長を書き込んで分数を作ればよい).

課題 4-5　例 4-3 の減少列分解 $(s_2s_1)(s_2)()$ に EGMS 対応を施して (P,Q) を求め, 例 4-4 の表の $Q = \begin{smallmatrix}2&3\\3&\end{smallmatrix}$ と一致することを確かめよ.