4 群行列式

ここでは, 巡回行列式の因数分解の議論を再考して, 群行列式の概念を導入する.

- **4-1：巡回行列式の書き換え**

ξ を 1 の原始 n 乗根とすると,

$$U_n = \{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}\}$$

は位数が n の巡回群である. これらを用いると, 巡回行列式 $C(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ の因数分解

$$\det\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & X_1 & \cdots & X_{n-2} \\ X_{n-2} & X_{n-1} & X_0 & \cdots & X_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_0 \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1}(X_0 + \xi^j X_1 + \cdots + \xi^{(n-1)j}X_{n-1})$$

を得た. 今, n 次巡回群 C_n の生成元が a とすれば, **補題 3.2** より C_n の指標 χ は $\chi(a) \in U_n$ によって決定されていたから, $\chi(a) = \xi^l$ であるような $\chi \in \widehat{C_n}$ を χ_j とおくと

$$\chi_j(a^k) = \xi^{ij} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

によって与えられる. すると,

$$X_0 + \xi^j X_1 + \cdots + \xi^{(n-1)j}X_{n-1} = \chi_j(a^0)X_0 + \chi_j(a^1)X_1 + \cdots + \chi_j(a^{n-1})X_{n-1}$$

と表せるので, 巡回行列式は

$$\det\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & X_1 & \cdots & X_{n-2} \\ X_{n-2} & X_{n-1} & X_0 & \cdots & X_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_0 \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\chi_j(a^i)X_i\right)$$

で表せる.

ここで, 単なる記号の変換として, $Y_{a^i} := X_i$ とおくと,

$$\det\begin{pmatrix} Y_{a^0} & Y_{a^1} & Y_{a^2} & \cdots & Y_{a^{n-1}} \\ Y_{a^{n-1}} & Y_{a^0} & Y_{a^1} & \cdots & Y_{a^{n-2}} \\ Y_{a^{n-2}} & Y_{a^{n-1}} & Y_{a^0} & \cdots & Y_{a^{n-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Y_{a^1} & Y_{a^2} & Y_{a^3} & \cdots & Y_{a^0} \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\chi_j(a^i)Y_{a^i}\right)$$

すると, i が $0, 1, \dots, n-1$ をうごくとき, a^i は C_n の元をすべてうごくので, 右辺は

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{g\in C_n}\chi_j(g)Y_g\right)$$

であり, 左辺は,

$$\det\begin{pmatrix} Y_{a^0} & Y_{a^1} & Y_{a^2} & \cdots & Y_{a^{n-1}} \\ Y_{a^{n-1}} & Y_{a^0} & Y_{a^1} & \cdots & Y_{a^{n-2}} \\ Y_{a^{n-2}} & Y_{a^{n-1}} & Y_{a^0} & \cdots & Y_{a^{n-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Y_{a^1} & Y_{a^2} & Y_{a^3} & \cdots & Y_{a^0} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Y_{a^0} & Y_{a^1} & Y_{a^2} & \cdots & Y_{a^{n-1}} \\ Y_{a^{n-1}} & Y_{a^0} & Y_{a^1} & \cdots & Y_{a^{n-2}} \\ Y_{a^{n-2}} & Y_{a^{n-1}} & Y_{a^0} & \cdots & Y_{a^{n-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Y_{a^1} & Y_{a^2} & Y_{a^3} & \cdots & Y_{a^0} \end{pmatrix}^T = \det(X_{gh^{-1}})_{g,h\in C_n}$$

だから, まとめると

$$\mathsf{det}(X_{gh^{-1}})_{g,h\in C_n} = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{g\in C_n}\chi_j(g)Y_g\right)$$

を得る.

- **4-2：群行列式**

先の式において, 群 C_n は有限群 G に置き換えた式

$$\mathsf{det}(X_{gh^{-1}})_{g,h\in G} = \prod_{\chi\in\widehat{G}}\left(\sum_{g\in G}\chi(g)X_g\right)$$

が成り立つかを考えよう. まず, この式の左辺の行列式はきちんと式として定義されているだろうか? 巡回群の場合は, $a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}$ の指数を昇順で考えておけばよかったが, 一般の群の元は a^k のような形をしているとは限らない. つまり, 何を問題にしているかといえば, G の要素を添え字にもつような行列を考える時には, G の要素に順番を入れて表として並べているわけであるが, G の順序への与え方に依らずに左辺の行列式が定まることを確認する必要があるのである.

そのために, 行列式の定義を確認しよう. n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ に対して, A の行列式は

$$\mathsf{det}(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathsf{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義されていた. 例えば, $n=2$ のときは, $\mathfrak{S}_2 = \{e, \sigma = (1\ 2)\}$ であるから

$$\mathsf{det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \mathsf{sgn}(e)a_{1e(1)}a_{2e(2)} + \mathsf{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

となるのである.

レポート 4-1　$n = 3$ のとき, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ の行列式を定義に従って計算せよ.

補題 4.1. 有限群 G に対して, 行列式 $\mathsf{det}(X_{gh^{-1}})_{g,h\in G}$ は G の順序への入れ方に依存せずに定まる.

証明. $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ とおく. $\tau\in\mathfrak{S}_n$ をとり, これに対して

$$\Theta_\tau(G) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathsf{sgn}(\sigma)X_{g_{\tau\sigma(1)}g_{\tau(1)}^{-1}}\cdots X_{g_{\tau\sigma(n)}g_{\tau(n)}^{-1}}$$

とおく. e を恒等置換として, $\Theta_\tau(G) = \Theta_e(G)$ を示せば良い.

$$\begin{aligned}
\Theta_\tau(G) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathsf{sgn}(\sigma)X_{g_{\tau\sigma(1)}g_{\tau(1)}^{-1}}\cdots X_{g_{\tau\sigma(n)}g_{\tau(n)}^{-1}} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathsf{sgn}(\sigma)X_{g_{\tau\sigma\tau^{-1}(1)}g_1^{-1}}\cdots X_{g_{\tau\sigma\tau^{-1}(n)}g_n^{-1}} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathsf{sgn}(\tau\sigma\tau^{-1})X_{g_{\tau\sigma\tau^{-1}(1)}g_1^{-1}}\cdots X_{g_{\tau\sigma\tau^{-1}(n)}g_n^{-1}} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathsf{sgn}(\sigma)X_{g_{\sigma(1)}g_1^{-1}}\cdots X_{g_{\sigma(n)}g_n^{-1}} \\
&= \Theta_e(G)
\end{aligned}$$

となり, 行列式は G への順序の入れ方に依存しない. □

定義 4.2. 有限群 G に対して, 行列式

$$\Theta(G) := \mathsf{det}(X_{gh^{-1}})_{g,h\in G}$$

を G の **群行列式** と呼ぶ.

定理 4.3. 有限群 G に対して,

$$\Theta(G) = \prod_{\chi\in\widehat{G}}\left(\sum_{g\in G}\chi(g)X_g\right)$$

が成り立つ.

証明. 行列 X, A, D を次で定める.

$$X = (\chi(g))_{\chi\in\widehat{G},g\in G}, \quad A = (X_{gh^{-1}})_{g,h\in G}, \quad D = (p_\chi\delta_{\chi,\chi'})_{\chi,\chi'\in\widehat{G}}$$

ただし,

$$p_\chi = \sum_{g\in G}\chi(g)X_g$$

であり, $\delta_{\chi,\chi'}$ は Kronecker のデルタである. このとき,

$$XA = \left(\sum_{g\in G}\chi(g)X_{gh^{-1}}\right)_{\chi\in\widehat{G},h\in G}, \quad DX = \left(\sum_{\chi'\in\widehat{G}}p_\chi\delta_{\chi,\chi'}\chi'(h)\right)_{\chi\in\widehat{G},h\in G}$$

である. 各成分を比較してみよう. $\chi\in\widehat{G}, h\in G$ に対して

$$\sum_{\chi'\in\widehat{G}}p_\chi\delta_{\chi,\chi'}\chi'(h) = p_\chi\chi(h) = \sum_{g\in G}\chi(g)X_g\chi(h) = \sum_{g\in G}\chi(g)\chi(h)X_g = \sum_{g\in G}\chi(gh)X_g = \sum_{g\in G}\chi(g)X_{gh^{-1}}$$

だから $XA = DX$ が成り立つ.

また, $|G| = n$ とすれば, **定理 3.6** より $X\overline{X}^T = nE_n$ が成り立つ. ただし, $\overline{X}^T = (\overline{\chi(g)})_{g\in G.\chi\in\widehat{G}}$ は X の随伴行列であり, E_n は単位行列である. 両辺の行列式をとれば, $\mathsf{det}(X)^2 = n^n \neq 0$ である. よって, $XA = DX$ の両辺の行列式をとれば

$$\Theta(G) = \mathsf{det}(A) = \mathsf{det}(D) = \prod_{\chi\in\widehat{G}}p_\chi = \prod_{\chi\in\widehat{G}}\left(\sum_{g\in G}\chi(g)X_g\right)$$

を得る. □

例 4-1　$G = C_2\times C_2$ のときを考えよう. ここで, $C_2 = \{1,-1\}$ は位数 2 の巡回群である.

$$X_0 = X_{(1,1)}, \quad X_1 = X_{(1,-1)}, \quad X_2 = X_{(-1,1)}, \quad X_3 = X_{(-1,-1)}$$

とおく. さて, C_2 上の指標群 $\widehat{C_2} = \{\chi_1,\chi_2\}$ は

$$\chi_1(1) = 1, \quad \chi_1(-1) = 1, \quad \chi_2(1) = 1, \quad \chi_2(-1) = -1$$

の 2 つである. 補題 3.3 によって, $\widehat{G} = \{\chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{21}, \chi_{22}\}$ は

$$
\begin{aligned}
\chi_{11} = \phi^{-1}(\chi_1, \chi_1):\quad & \chi_{11}(1,1) = \chi_1(1)\chi_1(1) = 1, \quad \chi_{11}(1,-1) = \chi_1(1)\chi_1(-1) = 1, \\
& \chi_{11}(-1,1) = \chi_1(-1)\chi_1(1) = 1, \quad \chi_{11}(-1,-1) = \chi_1(-1)\chi_1(-1) = 1, \\
\chi_{12} = \phi^{-1}(\chi_1, \chi_2):\quad & \chi_{12}(1,1) = \chi_1(1)\chi_2(1) = 1, \quad \chi_{12}(1,-1) = \chi_1(1)\chi_2(-1) = -1, \\
& \chi_{12}(-1,1) = \chi_1(-1)\chi_2(1) = 1, \quad \chi_{12}(-1,-1) = \chi_1(-1)\chi_2(-1) = -1, \\
\chi_{21} = \phi^{-1}(\chi_2, \chi_1):\quad & \chi_{21}(1,1) = \chi_2(1)\chi_1(1) = 1, \quad \chi_{21}(1,-1) = \chi_2(1)\chi_1(-1) = 1, \\
& \chi_{21}(-1,1) = \chi_2(-1)\chi_1(1) = -1, \quad \chi_{21}(-1,-1) = \chi_2(-1)\chi_1(-1) = -1, \\
\chi_{22} = \phi^{-1}(\chi_2, \chi_2):\quad & \chi_{22}(1,1) = \chi_2(1)\chi_2(1) = 1, \quad \chi_{22}(1,-1) = \chi_2(1)\chi_2(-1) = -1, \\
& \chi_{22}(-1,1) = \chi_2(-1)\chi_2(1) = -1, \quad \chi_{21}(-1,-1) = \chi_2(-1)\chi_2(-1) = 1,
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\Theta(G) &= \mathsf{det}\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_0 & X_3 & X_2 \\ X_2 & X_3 & X_0 & X_1 \\ X_3 & X_2 & X_1 & X_0 \end{pmatrix} \\
&= (X_0 + X_1 + X_2 + X_3)(X_0 - X_1 + X_2 - X_3)(X_0 + X_1 - X_2 - X_3)(X_0 - X_1 - X_2 + X_3)
\end{aligned}
$$

レポート 4-2　上の例に従って, $G = C_3 = \{1, \omega, \omega^2\}$ のときに群行列式 $\Theta(G)$ を一次式の積に因数分解せよ.