第 1 回
クイバーとその表現

――線型代数からの出発――

線型代数で我々が相手にしたのは，ベクトル空間がひとつと，その上の線型写像がひとつ，という登場人物のごく少ない世界であった．本講義で学ぶ**クイバーの表現論**は，この世界を一気に押し広げる．いくつものベクトル空間と，それらの間を行き交ういくつもの線型写像が，ある決まった形に配置されたもの――それを丸ごとひとつの対象とみなし，「分類せよ」と問うのである．その「決まった形」を指定するのが**クイバー**，すなわち有向グラフであり，配置図に空間と写像を実際に流し込んだものが**表現**である．第 1 回の目標は，この二つの言葉を図を頼りに自分のものにし，あわせて表現の射・同型・直和という，以後ずっと使う基本語彙を整えることに尽きる．

以下，k は体を表す．具体例ではつねに複素数体 $k = \mathbb{C}$ を思い浮かべてよい．なぜ複素数かといえば，あとで「固有値がいつでも存在する」という代数閉体の性質が効いてくるからだが，それは追って明らかになる．ベクトル空間はすべて k 上の有限次元空間とする．

1　この講義の地図

行き先を先に示しておこう．線型代数では，自己準同型 $f\colon V \to V$ を分類する問題を考え，その答えとして行列の標準形を得た．クイバーの表現論は，これを大きく一般化する．複数の空間と複数の写像が「ある決まった形」に並んだものを一括して扱い，それらを同型を除いて数え上げよ，と問うのである．配置の形を与えるのがクイバー，配置図に空間と写像を流し込んだものが表現だ，と今は思っておけばよい．

この講義の終着点は，第 6 回で扱う次の定理である．

> **Gabriel の定理（1972）．** クイバーの表現が「本質的に有限個」で済むのは，その形が A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 という特別な図形（**Dynkin 図形**）であるとき，そのときに限る．しかもそのとき，表現は**ルート系**という対称性の言葉でぴたりと数え上げられる．

代数（表現論）と幾何（ルート系・Lie 理論）と組合せ論とが，一点で出会う定理である．証明の細部には立ち入らない．本講義の流儀は，徹頭徹尾，**具体例を手で動かして**その姿をつかむことにある．

2　配置ひとつで難しさが変わる

クイバーの定義に入る前に，線型代数の復習を兼ねて，よく似た二つの分類問題を並べてみたい．いずれも体 $k = \mathbb{C}$ 上で考える．見かけはどちらも「線型写像が 1 本」だが，難しさはまるで違う．そしてその違いこそ，これから学ぶ理論の出発点なのである．

■(A)　二つの空間の間の写像 $f\colon V \to W$．　基底をうまく取り替えると，f を表す行列は

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (r = \operatorname{rank} f)$$

の形にできる．本質的な情報は階数 r ただひとつであり，分類はあっけないほど易しい．

■(B)　**ひとつの空間の自己準同型** $g\colon V \to V$.　今度は入口と出口が同じ空間なので，基底の取り替えが「両側に同時に」効く（$g \mapsto P^{-1}gP$）．使える自由度が半分に減るぶん，分類は格段に難しくなる．その完全な答えが**ジョルダン標準形**とよばれる定理である．

ここで，ジョルダン標準形をまだ習っていない読者もいるだろう．心配は要らない．本講義はその証明も運用も求めない．必要なのは結論の顔つきだけである——対角化できない行列であっても，固有値 λ を対角に並べ，そのすぐ上の段に 1 をいくつか載せた**ジョルダン細胞**

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

を積み木のように並べれば，どんな自己準同型も（相似を除いて）必ず表せる，という一点だ．固有値 λ という連続的な数が分類に顔を出している——ここをぜひ覚えておいてほしい．第 3 回で，これがそっくりそのまま「無限に多くの表現」となって戻ってくる．

同じ「写像 1 本」でも，$V \to W$ と $V \to V$ では世界が違う．違いを生むのは写像の**配置**，すなわちどの空間からどの空間へ向かうかである．(A) は矢印 $\bullet\!\longrightarrow\!\bullet$ に，(B) は自分自身へ戻る矢印（ループ）$\bullet\!\circlearrowright$ に対応する．配置図の形が分類問題の難しさを支配する——これが Gabriel の定理へ向かう長い物語の，最初の伏線である．

3　クイバーの定義

定義 3.1 (クイバー)**.** **クイバー**（箙，quiver）Q とは，データの組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ である：Q_0 は**頂点**の有限集合，Q_1 は**矢印**の有限集合，そして $s, t\colon Q_1 \to Q_0$ は各矢印 α にその**始点** $s(\alpha)$ と**終点** $t(\alpha)$ を与える写像である．$s(\alpha) = i,\ t(\alpha) = j$ のとき $\alpha\colon i \to j$ と書く．

要するにクイバーとは有向グラフのことである．ただし多重辺もループ（$i \to i$）も許す，少しばかり寛容な有向グラフだと思えばよい．

例 3.2 (基本的なクイバーたち)**.** 以下は本講義に繰り返し現れる主役たちである（各図の上に型の名前を添えた）．

A_2 型　A_3 型　Jordan 型　Kronecker 型

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \qquad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd}$$

巡回（$\widetilde{A}_2$）型　D_4 型

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & \\ 2 \arrow[rr] & & 3 \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \\ & 0 & \\ & 3 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$A_2, A_3, D_4, \ldots$ という名前は，矢印の向きを忘れて得られる**台グラフ**（underlying graph）の形に由

来する．向きは今は脇役に見えるが，あとで本質的な働きをする．

定義 3.3 (道)**.** クイバー Q の**道**（path）とは，矢印を向きにそってつないだ列 $\alpha_\ell \cdots \alpha_2\alpha_1$（$t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$）のことである．各頂点 i には，その場にとどまる長さ 0 の道 e_i も考える．道は「データがどの経路を流れるか」を表していると思えばよい．

4　クイバーの表現

いよいよ主役を定義する．からくりは拍子抜けするほど単純で，**頂点にベクトル空間を，矢印に線型写像を置く**，ただそれだけである．

定義 4.1 (クイバーの表現)**.** クイバー Q の**表現**（representation）V とは，各頂点 $i \in Q_0$ に有限次元ベクトル空間 V_i を，各矢印 $\alpha\colon i \to j$ に線型写像 $V_\alpha\colon V_i \to V_j$ を割り当てたもの $V = \big((V_i)_{i\in Q_0}, (V_\alpha)_{\alpha\in Q_1}\big)$ である．

例 4.2 (配置で見る表現)**.**

(1) **1 頂点** A_1**.** 矢印がないので，表現は単なるベクトル空間 V_1.

(2) A_2 **型** $1 \xrightarrow{\alpha} 2$**.** 表現は線型写像 $V_\alpha\colon V_1 \to V_2$ にほかならない．たとえば

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)} \mathbb{C}^2.$$

(3) **Jordan 型（ループ）.** 表現は対 (V_1, V_α)，すなわちベクトル空間と自己準同型の組である．これはまさに節 2 の (B)，線型代数そのものだ．たとえば $\big(\mathbb{C}^2, \left(\begin{smallmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{smallmatrix}\right)\big)$ はジョルダン細胞である．

(4) **Kronecker 型** $1 \rightrightarrows 2$**.** 表現は **2 本**の写像 $V_\alpha, V_\beta\colon V_1 \to V_2$ の組である．(A) でも (B) でもない，第三の難しさをもつ（第 3 回）．

表現を図示するときは，頂点の上にベクトル空間（や次元）を，矢印の上に行列を書き込むとよい：

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\quad\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\quad} \mathbb{C}^2$$

定義 4.3 (次元ベクトル・単純表現・零表現)**.** 表現 V の**次元ベクトル**を $\underline{\dim}\, V = (\dim V_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ と定める（各頂点の空間の次元を並べたもの）．頂点 i に k を置き他をすべて 0，すべての矢印を零写像とした表現を**単純表現** S_i とよぶ（$\underline{\dim}\, S_i$ は i 成分のみ 1）．すべての空間が 0 の表現を**零表現** 0 とよぶ．

注意 4.4. クイバーの表現は，**道代数** kQ（道を基底とする結合代数）上の加群とみなせる．つまり「クイバーの表現論」とは，ある具体的な代数の表現論にほかならない．本講義では加群の言葉を前面には出さないが，背後にこの事実が控えていることは頭の隅に置いておくと見通しがよい．

5　表現の射・同型・直和

表現を「比べ」「貼り合わせ」「分解する」ための言葉を用意しよう．急所はただ一つ，**すべての矢印と両立せよ**という要求である．この一語が，これから先のすべてを動かしている．

定義 5.1 (表現の射)**.** Q の表現 V, W に対し，V から W への**射**（morphism）$\varphi\colon V \to W$ とは，線型写像の族 $\varphi = (\varphi_i\colon V_i \to W_i)_{i \in Q_0}$ であって，**各矢印** $\alpha\colon i \to j$ について次の図式が可換になるものをいう：

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "V_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & V_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\ W_i \arrow[r, "W_\alpha"'] & W_j \end{tikzcd} \qquad \text{すなわち} \quad \varphi_j \circ V_\alpha = W_\alpha \circ \varphi_i.$$

この可換性が「矢印と両立する」という条件であり，クイバーの表現論の心臓部である．

定義 5.2 (同型)**.** 射 $\varphi\colon V \to W$ で，各 φ_i が同型（可逆）であるものを**同型**とよび，$V \cong W$ と書く．分類とは「同型を除いて表現を数える」ことである．

例 5.3 (同型 = 基底の取り替え)**.** A_2 型で，二つの表現 $V:\ \mathbb{C}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{C}^2$ と $W:\ \mathbb{C}^2 \xrightarrow{B} \mathbb{C}^2$ が同型であるとは，可逆行列 P, Q で $B = Q\,A\,P^{-1}$ となること（$\varphi_1 = P, \varphi_2 = Q$）である．これは「定義域と値域の基底を独立に取り替える」操作にほかならない．だから A は階数標準形 $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ に直せる——節 2 の (A) が，ここにそのまま現れている．

定義 5.4 (直和)**.** 表現 V, W の**直和** $V \oplus W$ を，成分ごとの直和

$$(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i, \qquad (V \oplus W)_\alpha = \begin{pmatrix} V_\alpha & 0 \\ 0 & W_\alpha \end{pmatrix}$$

で定める．次元ベクトルは加法的である：$\underline{\dim}\,(V \oplus W) = \underline{\dim}\,V + \underline{\dim}\,W$.

例 5.5 (直和の図示)**.** A_2 型で，$S_1 = (k \to 0)$ と $S_2 = (0 \to k)$ の直和は

$$S_1 \oplus S_2 : \quad k \oplus 0 \xrightarrow{0} 0 \oplus k.$$

一方 $E = (k \xrightarrow{1} k)$ はこれとは別物である．次回，これらが「分解の素」になることを見る．

こうして Q の表現たちは，射を矢とする圏 $\mathrm{rep}(Q)$ をなす．我々の最終目標は，直和の「素」にあたる**直既約表現**を，同型を除いてすべて求めることである．素数をすべて知れば整数の掛け算の世界が見渡せるように，直既約表現をすべて知ればこの圏が見渡せる——次回はそこへ踏み込む．

6　まとめと次回予告

今回の要点を一息でまとめておこう．クイバーとは有向グラフであり，その表現とは頂点に空間・矢印に写像を置いたものであった．自己準同型の分類（ジョルダン標準形）は，ループ 1 本のクイバーの表現論にほかならない．表現の射とはすべての矢印と両立する線型写像の族であり，同型とは基底の取り替え，直和は成分ごとに作る．

次回は「これ以上分解できない」表現，すなわち**直既約表現**を定義し，整数の素因数分解にあたる **Krull–Schmidt の定理**を述べる．そして最初の分類例として，A_2 型の直既約表現がちょうど 3 つしかないことを，手で確かめる．

演習問題．(1) 巡回型クイバー $1 \to 2 \to 3 \to 1$ の表現とは，どのようなデータの組か説明せよ．
(2) A_2 型の表現 $\mathbb{C} \xrightarrow{0} \mathbb{C}$ と $\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C}$ は同型でないことを，定義に従って示せ．

(3) Jordan 型の表現 $(\mathbb{C}^2, A)$ と $(\mathbb{C}^2, B)$ が同型 $\iff$ A, B が相似（$B = P^{-1}AP$）であることを確かめよ．これにより「Jordan 型表現の分類 = 相似による行列の分類」であることを納得せよ．

(4) A_2 型で，$\underline{\dim}\, V = (2, 1)$ となる表現の同型類は何種類あるか，階数で場合分けして数えよ．

(5) 表現の射 $\varphi\colon V \to W$ に対し，各頂点で核 $\ker \varphi_i$ をとると，それが V の「部分表現」になる（矢印が核を核へ写す）ことを確かめよ．