第 2 回
直既約表現と Krull–Schmidt の定理

——分類の「素」をさがす——

前回，クイバー Q の表現とは各頂点 i にベクトル空間 V_i，各矢印 $\alpha\colon i \to j$ に線型写像 $V_\alpha\colon V_i \to V_j$ を割り当てたものであり，射とはすべての矢印と両立する線型写像の族で，直和は成分ごとに作る，ということを学んだ．基底体は $k = \mathbb{C}$ を念頭におく．

さて，表現を分類するといっても，すべての表現を片端から眺めるのは芸がない．整数を理解したければ素数を調べればよいように，表現にも「素」にあたるものがあるはずだ．それが**直既約表現**である．今回はこれを定義し，「直既約への分解は本質的にただ一通り」という **Krull–Schmidt の定理**を述べ，最初の完全な分類例として A_2 型の直既約がちょうど 3 つであることを，手を動かして確かめる．直既約をすべて知れば分類は終わる——この見通しを今回つけておきたい．

1　部分表現と商表現

「分解」を語るには，まず「部分」を定義せねばならない．そして鍵は，やはり**矢印との両立**にある．勝手に部分空間を選んでよいわけではない，というところに注意してほしい．

定義 1.1 (部分表現)**.** Q の表現 V に対し，各頂点で部分空間 $W_i \subseteq V_i$ を選び，**各矢印** $\alpha\colon i \to j$ が $V_\alpha(W_i) \subseteq W_j$ を満たすとき，$W = (W_i)$ を V の**部分表現**という（矢印 V_α を W_i に制限すると $W_i \to W_j$ になる）．このとき商空間 V_i/W_i にも自然に写像が誘導され，**商表現** V/W が定まる．

例 1.2. A_2 型 $V:\ \mathbb{C}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{C}^2$，$A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ を考える．$W_1 = \langle e_1\rangle$，$W_2 = \langle e_1\rangle$ とおくと $A(W_1) = \langle e_1\rangle = W_2 \subseteq W_2$ だから W は部分表現で，$W:\ \mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C}$ である．また $W_1 = \langle e_2\rangle$，$W_2 = 0$ も部分表現で $W':\ \mathbb{C} \xrightarrow{0} 0$．しかし，たとえば $W_1 = \langle e_1\rangle$，$W_2 = 0$ では $A(W_1) = \langle e_1\rangle \not\subseteq 0$ となって両立しない．**勝手に**部分空間を選んでも部分表現になるとは限らない，という当たり前だが大事な事実を，ここで確認しておく．

2　直既約表現

定義 2.1 (直既約表現)**.** 零でない表現 V が**直既約**（indecomposable）であるとは，$V \cong V' \oplus V''$ ならば $V' = 0$ または $V'' = 0$ となること，すなわち**これ以上ふたつの非零表現の直和には割れない**ことをいう．

定義はこれでよいが，直既約かどうかを毎回「割ってみる」のは骨が折れる．もっと見通しのよい判定法がある．それは自己準同型環 $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$ を眺めることだ．直和分解 $V = V' \oplus V''$ は，V' への射影 e という**冪等元**（$e^2 = e$）をひとつ用意することと同じである．逆に冪等元があれば，その像と核で V が割れる．したがって，

$$V \text{ が直既約} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{End}(V) \text{ の冪等元は } 0 \text{ と } \mathrm{id} \text{ のみ}.$$

直既約性という幾何的な問いが，環の冪等元という代数的な問いに翻訳された．これが今回の最初

の急所である．

例 2.2 (A_2 型の自己準同型環)**.** $E = (k \xrightarrow{1} k)$ の射 $\varphi\colon E \to E$ は $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ で，可換性 $\varphi_2 \cdot 1 = 1 \cdot \varphi_1$ より $\varphi_1 = \varphi_2 =: c \in k$ となる．ゆえに $\mathrm{End}(E) \cong k$．体 k の冪等元は $0, 1$ しかないから E は直既約である．同じように S_1, S_2 も $\mathrm{End} = k$ であり，直既約である．

注意 2.3 (局所性). 有限次元表現 V が直既約であることは，$\mathrm{End}(V)$ が**局所環**である（可逆でない元の全体がイデアルをなす）こととも同値である．代数閉体上では，直既約表現の自己準同型は「スカラー＋冪零」の形をしており，可逆かそうでないかがはっきり分かれる．例 2.2 の $\mathrm{End}(E) = k$ はその最も簡単な場合だ．この「可逆性がきれいに分かれる」という局所性こそ，次の一意分解定理を支える土台になる．

3　Krull–Schmidt の定理

整数論に「すべての正整数は素数の積に一意に分解する」という算術の基本定理があった．まったく同じことが表現にも成り立つ．**素数の役を演じるのが直既約表現**である．

定理 3.1 (Krull–Schmidt)**.** 有限次元表現 V は，有限個の**直既約**表現の直和に分解できる：

$$V \cong V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \cdots \oplus V^{(m)} \qquad (\text{各 } V^{(r)} \text{ は直既約}).$$

しかもこの分解は，**順序と同型を除いて一意**である．すなわち別の直既約分解 $V \cong W^{(1)} \oplus \cdots \oplus W^{(n)}$ があれば $m = n$ で，番号を付け替えて $V^{(r)} \cong W^{(r)}$ にできる．

証明は前節の局所性を使うが，本講義では立ち入らない．肝心なのは結論の使い道である．この定理のおかげで，「表現を同型を除いて分類する」という大問題が，「**直既約表現をすべて求める**」というはるかに具体的な問題に化ける．あとは直既約因子を何個ずつ足し合わせるかを言えばよく，それは次元ベクトルが教えてくれる（次元ベクトルは因子の和だから）．以後の講義はすべて，この一点をめぐって進む．

注意 3.2. 無限次元や，より一般の状況では一意分解は崩れうる．「有限次元」と「直既約」がきちんと効いているのである．整数の素因数分解で「正の有限な数」という枠を外すと一意性が壊れるのと事情は似ている．

4　最初の分類：A_2 型は直既約がちょうど 3 つ

道具がそろった．さっそく A_2 型 $1 \xrightarrow{\alpha} 2$ で直既約表現をすべて求めてみよう．表現とは線型写像 $f = V_\alpha\colon V_1 \to V_2$ のことであった．候補は次の 3 つである．

$$\begin{array}{ccc} (1,0) & (0,1) & (1,1) \\ k \longrightarrow 0 & 0 \longrightarrow k & k \xrightarrow{1} k \\ S_1 = M[1,1] & S_2 = M[2,2] & E = M[1,2] \end{array}$$

（下段は次元ベクトル．記号 $M[i,j]$ は次回導入する**区間表現**で，ここでは名前と思ってよい．）これらが直既約であることは例 2.2 で見たとおりだ．問題は，**これら以外に直既約はない**ことである．それ

を次の命題が言う．

命題 4.1. A_2 型の任意の表現 $V\colon V_1 \xrightarrow{f} V_2$ は, S_1, S_2, E の直和に分解する．より正確に, $r = \operatorname{rank} f$ とおくと

$$V \;\cong\; E^{\oplus r} \;\oplus\; S_1^{\oplus(\dim V_1 - r)} \;\oplus\; S_2^{\oplus(\dim V_2 - r)}.$$

したがって直既約は S_1, S_2, E の**ちょうど *3* つ**である．

具体例で見る証明. 種を明かせば，使うのは線型代数の階数標準形だけである．$\ker f$ の基底をとり，それを V_1 の基底に延長する．延長した部分は f で線型独立な像をもつから，値域側の基底をうまく選べば f の行列は

$$f = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (r = \operatorname{rank} f)$$

となる（前回の「基底の独立な取り替え = 同型」を思い出そう）．この基底のもとで $V_1 = k^{\dim V_1}$, $V_2 = k^{\dim V_2}$ を 1 次元ずつにばらすと，対角の 1 は V_1, V_2 の各 1 次元を 1 倍で結ぶので $E = (k \xrightarrow{1} k)$ を r 個生み，余った V_1 側（$\ker f$ 方向，$\dim V_1 - r$ 次元）は $S_1 = (k \to 0)$ を，余った V_2 側（$\operatorname{coker} f$ 方向，$\dim V_2 - r$ 次元）は $S_2 = (0 \to k)$ を生む．これらの直和に分かれる． □

例 4.2 (手を動かす)**.** $V\colon \mathbb{C}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{C}^2$,　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $r = 1$．ゆえに

$$V \cong E \oplus S_1^{\oplus 2} \oplus S_2^{\oplus 1}, \qquad \underline{\dim}\, V = (3,2) = (1,1) + 2\,(1,0) + (0,1).$$

次元ベクトルの等式 $(3,2) = (1,1) + 2(1,0) + (0,1)$ が，表現の分解をそっくり映していることに注目してほしい．分解を数えるとは，結局この足し算を読むことなのである．

こうして A_2 型の直既約は S_1, S_2, E の 3 つ，その次元ベクトルは $(1,0), (0,1), (1,1)$ と確定した．この「3」と「$\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$」を覚えておいてほしい．第 5 回で，まったく同じ 3 つの組が A_2 **型ルート系の正ルート**として再登場する．それが Gabriel の定理の最小の実例になる．

5　まとめと次回予告

部分表現とは矢印と両立する部分空間の族であり，直既約とは直和に割れない表現であった．Krull–Schmidt の定理により，有限次元表現は直既約の直和に一意分解する（素因数分解の類比である）．したがって分類とは，直既約を全部求めることに帰着した．その最初の例として，A_2 型の直既約はちょうど 3 つで，証明に使ったのは階数標準形だけであった．

では，直既約が有限個で済んだのは幸運だったのだろうか．次回，A_3 型でも有限個（6 個）であることを見る一方，矢印をたった 1 本増やした **Kronecker 型**では直既約が**無限個**になる現場を目撃する．「有限表現型」と「無限表現型」を分ける境界——そこが次の主題である．

演習問題. (1) A_2 型の表現 $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{C}^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ を直既約分解せよ．また $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合はどうか.

(2) $\operatorname{End}(S_1) \cong k$ を定義に従って確かめ，S_1 が直既約であることを示せ.

(3) $V \oplus V$（V は任意の表現）は，$V \neq 0$ ならば直既約でないことを，冪等元 $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{End}(V \oplus V)$ を使って説明せよ.

(4) Jordan 型（ループ 1 本）の表現 $(\mathbb{C}^2, J)$，$J = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ は直既約であることを，End の冪等元を調べて示せ．（ヒント：J と可換な行列は $aI + bN$，$N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の形に限る．）

(5) Krull–Schmidt の定理を整数の素因数分解と対比し，「直既約 $\leftrightarrow$ 素数」「直和 $\leftrightarrow$ 積」「次元ベクトル $\leftrightarrow$ 何の量」かを表にまとめよ．