

第3回 有限表現型と無限表現型

—Kronecker クイバーという分かれ道—

前回 Krull-Schmidt の定理を得て、表現の分類は直既約表現を同型を除いて全部求めることに帰着した。\$A_2\$ 型の直既約は \$S_1, S_2, E\$ のちょうど 3 つであった。

そこで自然に問いたくなる——直既約が有限個で済むのは、いつでも起こることなのか、それとも \$A_2\$ がたまたま行儀のよい例だったのか。今回の答えははっきりしている。行儀のよいクイバーと、そうでないクイバーがあるのだ。\$A_n\$ 型では直既約は有限個（区間表現で尽きる）だが、矢印をたった 1 本足した Kronecker 型では、直既約がいきなり無限個に膨れ上がる。その境界を目撃するのが今回の主題である。無限がどこから湧くのか、その出どころも見届けたい。

1 有限表現型・無限表現型

定義 1.1 (表現型). 連結クイバー \$Q\$ が有限表現型 (finite representation type) であるとは、\$Q\$ の直既約表現が同型を除いて有限個しかないことをいう。そうでないとき無限表現型という。

前回より \$A_2\$ 型は有限表現型（直既約 3 個）であった。問題はもちろん、どのクイバーが有限表現型かである。まず良い例 \$A_n\$ を眺め、それから最初の悪い例 Kronecker に会うことにしよう。良い悪いの分かれ目がどこにあるのかを、肌で感じてほしい。

2 \$A_n\$ 型：区間表現がすべて

向きを \$1 \to 2 \to \dots \to n\$ にそろえた \$A_n\$ 型を考える（向きの取り方は本質に効かない）。直既約は、前回の \$S_1, S_2, E\$ を素直に一般化した区間表現で与えられる。名前のとおり、連続した区間に \$k\$ を並べただけの、いちばん簡単な表現である。

定義 2.1 (区間表現). \$1 \leq i \leq j \leq n\$ に対し、区間 \$[i, j]\$ の区間表現 \$M[i, j]\$ を

$$M[i, j]_v = \begin{cases} k & (i \leq v \leq j) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}, \quad \text{区間内の矢印は id}_k$$

で定める。すなわち「連続した頂点に \$k\$ を並べ、その間を恒等写像でつなぎ、外は 0」とした表現である。\$M[i, i] = S_i\$ であり、\$A_2\$ の \$E\$ は \$M[1, 2]\$ にあたる。

例 2.2 (\$A_3\$ 型の直既約は 6 個). \$A_3 : 1 \to 2 \to 3\$ の区間表現は次の 6 つ（下段は次元ベクトル）：

$$\begin{array}{ccc} k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 & 0 \longrightarrow k \longrightarrow 0 & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k \\ M[1, 1] = S_1 (1, 0, 0) & M[2, 2] = S_2 (0, 1, 0) & M[3, 3] = S_3 (0, 0, 1) \\ \\ k \xrightarrow{1} k \longrightarrow 0 & 0 \longrightarrow k \xrightarrow{1} k & k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \\ M[1, 2] (1, 1, 0) & M[2, 3] (0, 1, 1) & M[1, 3] (1, 1, 1) \end{array}$$

これら以外に直既約はなく、任意の表現はこれらの直和になる。個数は \$6 = 3 \cdot 4/2\$。

命題 2.3. A_n 型は有限表現型であり, 直既約表現は区間表現 $M[i, j]$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) のちょうど

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \text{ 個}$$

で, 互いに非同型である.

証明の心は A_2 のときと同じで, 要は線型代数の標準形に尽きる. 連なった写像の列 $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_n$ を, 各段で像と核をそろえながら基底を取り直すと, 全体が「1 をいくつか斜めに並べた形」に分解し, 連なった 1 の列の一本一本が, ちょうど一本の区間表現を生むのである.

こうして A_n 型は有限表現型, 直既約は区間表現 $M[i, j]$ で, その個数は $n(n+1)/2$ と確定した. この数を心に留めておいてほしい. 第5回・第6回で, これがそのまま A_n 型の正ルートの個数と一致する. 偶然ではない.

3 Kronecker 型：最初の無限表現型

さて, 矢印を 1 本だけ増やそう. Kronecker クイバー

$$K: 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2$$

の表現は, 2 本の線型写像 $V_\alpha, V_\beta: V_1 \rightarrow V_2$ の組である. これは「2 つの写像を同時に基底変換で分類せよ」という問題で, たった一本増えただけなのに, 事態は急に難しくなる. まずはいちばん小さい, 1 次元の表現だけを調べてみよう. それだけで無限が顔を出す.

■1 次元の直既約が無限個ある. $V_1 = V_2 = k$ とし, $V_\alpha = a, V_\beta = b$ (スカラー) として, この表現を $V(a, b)$ と書く. $(a, b) \neq (0, 0)$ のとき $V(a, b)$ は直既約である. ではいつ同型か. $V(a, b) \rightarrow V(a', b')$ の射 $(\varphi_1, \varphi_2) = (c, d)$ は, 2 本の矢印それぞれの可換性

$$da = a'c, \quad db = b'c$$

を満たさねばならない. 同型なら $c, d \neq 0$ で, これは $(a', b') = \frac{d}{c}(a, b)$, すなわち (a, b) と (a', b') がスカラー倍で一致することと同値である. したがって

$$\{1\text{次元の直既約表現}\} / \cong \xleftarrow{1:1} \mathbb{P}^1 = \{[a:b]\}.$$

ここで \mathbb{P}^1 とは, 比 $[a:b]$ 全体のなす「射影直線」のことだ ((a, b) をスカラー倍でつぶしたもの).

$$\begin{array}{ccccccccc} [1:0] & & [1:1] & & [1:2] & & [1:\lambda] & & [0:1] \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \\ V(1,0) & & V(1,1) & & V(1,2) & & V(1,\lambda) & & V(0,1) \end{array}$$

直線 \mathbb{P}^1 のぶんだけ直既約がある (連続無限個!)

\mathbb{P}^1 は, $k = \mathbb{C}$ ならば非可算無限個の点をもつ. つまり 1 次元だけ見ても直既約はすでに無限にあり, Kronecker 型は無限表現型である. (実際にはさらに各次元 $(n, n), (n, n+1), \dots$ にも直既約があり, 全体像はもっと豊かだが, 無限と言うにはこの \mathbb{P}^1 ひとつで十分である.)

注意 3.1 (なぜ難しくなったのか). 1本の写像 f なら, 階数だけで分類できた. ところが2本 V_α, V_β になると, たとえば V_α が可逆な部分では「 $V_\alpha^{-1}V_\beta$ の固有値」が同型不変量として現れてくる. 固有値という連続パラメータが現れた, まさにその瞬間に, 直既約は無限個になる. 次節の Jordan 型と, 根はまったく同じである.

4 Jordan 型: ループも無限表現型

ループ1本のクイバーに戻ろう. その表現は対 (V, f) , $f \in \text{End}(V)$ であった (第1回). ここで第1回に顔つきだけ紹介したジョルダン標準形が効いてくる. 証明は引用するだけでよい——その定理が言うのは, $k = \mathbb{C}$ 上では

$$(V, f) \text{ が直既約} \iff f \text{ がただ一つの Jordan 細胞 } J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

である, ということだ. つまり直既約は (固有値 $\lambda \in k$, サイズ $n \geq 1$) の組で分類される. 固有値 λ が連続的に動くから, たとえばサイズ $n = 1$ の (k, λ) だけを見ても $\lambda \in k$ のぶんだけ無限にあり, Jordan 型もまた無限表現型である.

要するにこれは, ジョルダン標準形の言いかえにすぎない. 線型代数で「固有値が連続的に存在する」と眺めていたものが, 表現論の言葉では「無限表現型」として立ち現れる——同じ現象を別の角度から見ているだけなのである.

矢印やループを増やすと無限表現型になりうる. いま見た Kronecker 型 (二重矢印) と Jordan 型 (ループ) は, どちらも台グラフが Dynkin 図形でない最小の例であり, 無限表現型への入口になっている. そして両者の無限は, いずれも「固有値という連続量」から湧いていた. 次回はこの「連続量が湧くか否か」を, 次元ベクトルに付随する二次形式で数式としてとらえる.

5 まとめと次回予告

A_n 型は有限表現型で, 直既約は区間表現, 個数は $n(n+1)/2$ であった. 一方, 矢印を二重にした Kronecker 型は \mathbb{P}^1 のぶんだけ直既約をもつ無限表現型であり, ループの Jordan 型も固有値という連続パラメータゆえに無限表現型であった. 有限と無限を分ける境界は, どうやら台グラフの「形」にあるらしい.

次回はこの境界を数式でとらえる道具として, 次元ベクトルに付随する Tits 二次形式 $q(\mathbf{d})$ を導入する. 「 q が正定値か否か」が表現型を支配する, というのが核心である.

演習問題. (1) A_3 型の表現 $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{B} \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (1 \ 0)$ を区間表現の直和に分解せよ.

(2) Kronecker 型で $V(1, 0)$ と $V(0, 1)$ が非同型であることを, 射の方程式 $da = a'c$, $db = b'c$ から確かめよ.

(3) Kronecker 型で, 2本の矢印をともに零写像にした $(k \rightrightarrows k, 0, 0)$ は直既約でないことを示せ ($S_1 \oplus S_2$ に分解する). 無限族に $(a, b) = (0, 0)$ が含まれない理由を述べよ.

- (4) Jordan 型の直既約 $(\mathbb{C}^2, J_2(0))$, $J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が, 部分表現・商表現の言葉で「これ以上割れない」ことを説明せよ.
- (5) Kronecker 型と Jordan 型の「無限の出どころ」は, いずれも**固有値**という連続量である. 両者の対応 $(V_\alpha^{-1}V_\beta$ と f) を説明せよ.