第 4 回
次元ベクトルと Tits 二次形式

——表現型を測る二次形式——

前回，A_n 型は有限表現型（直既約 = 区間表現，$n(n+1)/2$ 個），Kronecker 型と Jordan 型は無限表現型であった．有限と無限を分ける境界は，どうやら台グラフの「形」にあるらしい，というところまで来た．

では，その「形」をどうやって数で捉えるか．今回の道具立てがそれに答える．まず次元ベクトルに，クイバーの矢印の向きを織り込んだ **Euler 形式**を入れる．これは見かけは素朴な双線型形式だが，正体は $\dim \mathrm{Hom} - \dim \mathrm{Ext}^1$ という，表現どうしの関係を測る量である．次にその向きの非対称性を均して **Tits 二次形式** q を作る．そして本講義の心臓部——**直既約の次元ベクトルは $q = 1$ をみたし，q が正定値なら有限表現型**——を見通す．抽象に見えるかもしれないが，最後はすべて具体的な計算に落ちる．恐れる必要はない．

1　Euler 形式（Ringel 形式）

次元ベクトルは $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ である．これに，矢印の向きを反映した**非対称**な双線型形式を入れよう．

定義 1.1 (Euler 形式)**.** クイバー Q に対し，$\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ の **Euler 形式**を

$$\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \rangle \ := \ \sum_{i\in Q_0} d_i e_i \ - \sum_{(\alpha\colon\, i\to j)\in Q_1} d_i\, e_j$$

で定める．第 1 項は頂点の寄与，第 2 項は矢印 $i \to j$ ごとに $d_i e_j$ を引く．**向きに依存する**点に注意せよ．

これは単なる組合せ量ではない．表現の間の「写像」と「拡大」を測っているのである．それを次の定理が言う．

定理 1.2 (Euler 形式のホモロジー的意味)**.** クイバーの表現 V, W に対し

$$\langle \underline{\dim}\, V,\ \underline{\dim}\, W \rangle \ = \ \dim_k \mathrm{Hom}(V, W) \ - \ \dim_k \mathrm{Ext}^1(V, W).$$

ここで $\mathrm{Hom}(V, W)$ は射の空間でなじみ深い．問題は $\mathrm{Ext}^1(V, W)$ である．これを難しく考える必要はない．$\mathrm{Ext}^1(V, W)$ とは，**W を下に，V を上にして繋いだ「本質的に異なる繋ぎ方」の個数**を測る空間だと思えばよい．正確には，短完全列

$$0 \to W \to E \to V \to 0$$

の形（E は W を部分表現，V を商にもつ表現）が，同値を除いて何通りあるかを測る．$\mathrm{Ext}^1 = 0$ なら繋ぎ方は自明なもの $E = W \oplus V$ しかなく，$\mathrm{Ext}^1 \neq 0$ なら W と V を「ねじって」貼り合わせた新しい表現が作れる，ということだ．なお，クイバーの表現では Ext^2 以上はつねに消えるので，関わるのは Hom と Ext^1 だけで済む．これは道代数が遺伝的（大域次元 ≤ 1）であることの帰結である．

例 1.3 (A_2 で確かめる)**.** A_2： $1 \xrightarrow{\alpha} 2$ を考える．直既約は $S_1 = (1,0)$, $S_2 = (0,1)$, $E = (1,1)$ であった．二通り計算してみよう．

まず $\langle \underline{\dim}\, E, \underline{\dim}\, E \rangle = \langle (1,1),(1,1) \rangle = (1+1) - \underbrace{1 \cdot 1}_{\alpha:1\to 2} = 1$．実際 $\mathrm{Hom}(E,E) = k$（前回）で $\mathrm{Ext}^1(E,E) = 0$ だから $1 - 0 = 1$．ぴたりと合う．

次が面白い．$\langle \underline{\dim}\, S_1, \underline{\dim}\, S_2 \rangle = \langle (1,0),(0,1) \rangle = 0 - \underbrace{1 \cdot 1}_{\alpha} = -1$．ここで $\mathrm{Hom}(S_1,S_2) = 0$ だが，非自明な拡大 $0 \to S_2 \to E \to S_1 \to 0$ がある．つまり S_2 を下，S_1 を上に貼り合わせると，ちょうど E が出来上がる．ゆえに $\mathrm{Ext}^1(S_1,S_2) = k$ で，$0 - 1 = -1$．これもぴたりと合う．**この拡大こそ，二つの単純 S_1, S_2 を「つなげて」E を作る操作**にほかならない．

Euler 形式が負になるのは，Hom より Ext^1 が大きいとき，すなわち**拡大が効いている**しるしである．矢印が表現どうしを結合する仕組みが，こうして一つの数に化けている．以上が今回の前半の急所だ．

2 Tits 二次形式

Euler 形式は向きに依存していた．その非対称性を「対称化」して，向きを忘れた量を取り出そう．それが表現型を測る主役となる．

定義 2.1 (Tits 二次形式)**.** $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ に対し

$$q(\boldsymbol{d}) \;:=\; \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{d} \rangle \;=\; \sum_{i \in Q_0} d_i^2 \;-\; \sum_{(\alpha:\, i \to j) \in Q_1} d_i\, d_j$$

を **Tits 二次形式**とよぶ．対角項 d_i^2 と，各辺ごとの積 $d_i d_j$ の差である．

注意 2.2 (向きによらない)．$q(\boldsymbol{d})$ には $d_i d_j$ しか現れないから，矢印の向き（$i \to j$ か $j \to i$ か）は結果に効かない．よって q は**台グラフだけ**で決まる．対称双線型形式 $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) := \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \rangle + \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{d} \rangle$ の行列は**一般化 Cartan 行列**

$$C_{ii} = 2, \qquad C_{ij} = -(\,i\text{–}j \text{ 間の辺の本数}\,) \quad (i \neq j)$$

であり，$q(\boldsymbol{d}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} C\, \boldsymbol{d}$ と書ける．

3 計算してみる

抽象論はここまでにして，手を動かそう．いくつかのクイバーで q を書き下し，正定値かどうかを見る．

例 3.1 (いろいろな q)**.**

(1) A_2**:** $q(d_1,d_2) = d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2$. 行列 $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ は判別式 > 0 で**正定値**．$q \geq 0$ で，$q = 0 \Rightarrow \boldsymbol{d} = 0$.

(2) A_n**（直線）：** $q(\boldsymbol{d}) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} d_i d_{i+1}$. 正定値（後述）.

(3) D_4**（中心 0，葉 $1,2,3$）：** $q(d_0; d_1, d_2, d_3) = d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - d_0 d_1 - d_0 d_2 - d_0 d_3$. 正定値.

(4) **Kronecker（二重辺）：** $q(d_1, d_2) = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 = (d_1 - d_2)^2$. **正定値でない**（半正定値）：$q(1,1) = 0$ なのに $(1,1) \neq 0$ である．

(5) **Jordan（ループ）：** ループ $\alpha : 1 \to 1$ は d_1d_1 を引くので $q(d_1) = d_1^2 - d_1^2 = 0$. 完全に退化している．

並べてみると，じつに鮮やかな対応が浮かび上がる．

クイバー	q の性質	表現型	台グラフ
A_2, A_n, D_4	正定値	有限	Dynkin
Kronecker	半正定値（$q(1,1) = 0$）	無限	$\widetilde{A}_1$（非 Dynkin）
Jordan	退化（$q \equiv 0$）	無限	ループ（非 Dynkin）

すなわち，q **が正定値であるクイバーは有限表現型，そうでなければ無限表現型**らしい．この観察を，次回示す「正定値 $\iff$ Dynkin」と合わせれば，それがそのまま Gabriel の定理になる．無限型の例で起きていたことも，いまや言葉にできる——$q(\boldsymbol{d}) = 0$ をみたす $\boldsymbol{d} \neq 0$（これを**零ルート**とよぶ）が存在し，それが前回見た「$\mathbb{P}^1$ ぶんの直既約」の源だったのである．

4　直既約の次元ベクトルは $q = 1$ をみたす

なぜ正定値性が有限性を生むのか．鍵は次の観察にある（証明は第 6 回で例示する）．

命題 4.1 (直既約は $q = 1$)**.** 台グラフが *Dynkin* 型のクイバー Q の**直既約**表現 V は，

$\mathrm{End}(V) = k$　(自己準同型はスカラーのみ；このとき V をブリックという),　　$\mathrm{Ext}^1(V, V) = 0$　(自己拡大なし；

を満たす．したがって

$$q(\underline{\dim}\, V) = \langle \underline{\dim}\, V, \underline{\dim}\, V \rangle = \dim \mathrm{Hom}(V, V) - \dim \mathrm{Ext}^1(V, V) = 1 - 0 = 1.$$

例 4.2. A_2 の直既約 S_1, S_2, E の次元ベクトル $(1,0), (0,1), (1,1)$ について

$$q(1,0) = 1, \quad q(0,1) = 1, \quad q(1,1) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

みごとに三つとも $q = 1$ である．A_3 の 6 つの区間表現の次元ベクトルでも，まったく同様に $q = 1$ となる（演習）．

ここで正定値性が決定打となる．正定値二次形式 q に対しては，$q(\boldsymbol{d}) \geq c\|\boldsymbol{d}\|^2$（ある $c > 0$）が成り立つので，

$$\{\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0} \ : \ q(\boldsymbol{d}) = 1\} \text{ は\textbf{有限集合}}$$

である（$q(\boldsymbol{d}) = 1$ をみたす整数点は有界領域に閉じ込められ，有限個しかない）．直既約の次元ベクトルはこの有限集合に含まれ，しかも各値ごとに直既約はたかだか 1 つしかない（第 5・6 回）．ゆえに直既約は有限個，すなわち有限表現型となる．

筋書きを一息で言えばこうだ．**直既約ならば** $q(\underline{\dim}\, V) = 1$**，**$q$ **が正定値ならばそんな次元ベクトルは有限個，ゆえに有限表現型．**残るのは「正定値 $\iff$ Dynkin」（次回）と「$q = 1$ の各次元ベクトルにちょうど 1 つの直既約」（第 6 回）の二点だけである．Gabriel の定理は，もう半分見えている．

5　まとめと次回予告

向きを織り込んだ Euler 形式 $\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \rangle = \dim \mathrm{Hom} - \dim \mathrm{Ext}^1$ から出発し，これを対称化して台グラフだけで決まる Tits 形式 $q(\boldsymbol{d}) = \sum d_i^2 - \sum_{辺} d_i d_j$ を得た．そして直既約ならば $q(\underline{\dim}\, V) = 1$，$q$ が正定値ならその解は有限個，ゆえに有限表現型，という核心の筋書きをつかんだ．

次回は，q が正定値になる台グラフがちょうど ADE **型 Dynkin 図形**であることを述べ，$q(\boldsymbol{d}) = 1$ の解（**ルート**）がなす**ルート系**を導入する．さらに，直既約を実際に構成し動かす**反射函手**を紹介する．

演習問題．(1) A_3 の 6 つの区間表現の次元ベクトルすべてについて $q = 1$ を確かめよ．

(2) Kronecker 型で $q(\boldsymbol{d}) = (d_1 - d_2)^2$ を導き，$q(\boldsymbol{d}) = 0$ となる最小の非零 $\boldsymbol{d}$ を求めよ（これが零ルート）．

(3) D_4 型で $q(d_0; d_1, d_2, d_3)$ を書き下し，$\boldsymbol{d} = (2; 1, 1, 1)$（中心 2，葉 1）に対して $q = 1$ を確かめよ．これは第 6 回で「最大ルート」として再登場する．

(4) A_2 で Euler 形式 $\langle \underline{\dim}\, S_2, \underline{\dim}\, S_1 \rangle$ を計算し，$\mathrm{Hom}(S_2, S_1), \mathrm{Ext}^1(S_2, S_1)$ の次元と照合せよ（向きの非対称性に注意）．

(5) 正定値な q に対し $q(\boldsymbol{d}) = 1$ の整数解が有限個であることを，A_2 の場合に具体的に（解は $\pm(1,0), \pm(0,1), \pm(1,1)$ の 6 個）確かめよ．