

## 第 5 回 ルート系と Dynkin 図形・反射関手

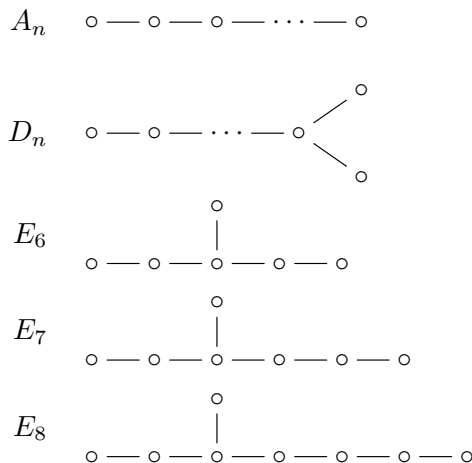
— 対称性で直既約を数える —

前回, Tits 形式  $q(\mathbf{d}) = \sum d_i^2 - \sum_{\text{辺}} d_i d_j$  を得て, 直既約ならば  $q(\dim V) = 1$ , そして  $q$  が正定値なら有限表現型, という核心をつかんだ. 残る鍵は二つ, 「 $q$  正定値  $\iff$  Dynkin」と「 $q = 1$  の各次元ベクトルにちょうど 1 つの直既約」であった.

今回はその一つめを片づけ, 二つめへの道を開く. まず正定値性をもつ台グラフが, ちょうど **ADE 型 Dynkin 図形** という美しいリストに尽きることを述べる. 次に  $q(\mathbf{d}) = 1$  の整数解を **ルート** と名づけ, それらがなす **ルート系** を導入する — 前回数えた直既約の次元ベクトルが, じつはこのルートそのものだったと分かる. さらに, ルートを動かす対称性 (Weyl 群) が, 表現のレベルでも **反射関手** として実現されることを,  $A_2$  の例で体験する. 対称性が直既約を数え上げる, その仕掛けを見てほしい.

### 1 ADE 型 Dynkin 図形

**定義 1.1** (ADE 型 Dynkin 図形). 次の単純辺グラフ (多重辺・ループを含まない) を **ADE 型 Dynkin 図形** という.



$A_n$  は  $n$  頂点の直線,  $D_n$  は端が二股に分かれた形,  $E_6, E_7, E_8$  は中心から三方に腕を伸ばした「T字」(腕の長さはそれぞれ  $(1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4)$ ) である. これらは, 単純連結 Lie 群の分類, 正多面体の対称性, 特異点の分類など, 数学のあちこちで同じ顔ぶれとして現れる. いわば普遍的なリストで, 本講義で出会えるのは幸運だと思ってよい.

**定理 1.2** (正定値  $\iff$  Dynkin). 連結グラフの Tits 形式  $q$  が正定値であることと, そのグラフが **ADE 型 Dynkin 図形** であることは同値である.

その「境界」に立つのが **拡大 Dynkin 図形 (アフィン型)**  $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_n$  で, そこでは  $q$  はちょうど半正定値になり (零ルートをもつ), 有限と無限の崖っぷちにいる. 前回の Kronecker =  $\tilde{A}_1$  がその最小例であった. Dynkin 図形をたった 1 頂点でも「太らせる」と正定値性が壊れ, 無限表現型へ転げ落ちる — この感覚は第 6 回でもう一度味わう.

## 2 ルートとルート系

**定義 2.1** (単純ルート・ルート・正ルート). 頂点  $i$  に対応する標準基底ベクトル  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  ( $i$  成分のみ 1) を**単純ルート**という. Dynkin 型クイバーに対し

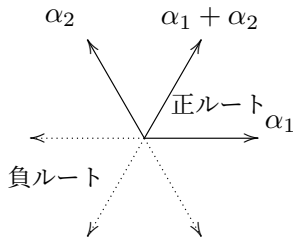
$$\Phi := \{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{Q_0} : q(\mathbf{d}) = 1\}$$

を**ルート系**, その元を**ルート**という. 各ルートは, 成分がすべて  $\geq 0$  かすべて  $\leq 0$  のいずれかになり (正定値性の帰結), 前者を**正ルート**  $\Phi^+$  とよぶ.  $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$ .

**例 2.2** ( $A_2$  のルート系は正六角形).  $q(d_1, d_2) = d_1^2 + d_2^2 - d_1d_2$  で,  $q(\mathbf{d}) = 1$  の整数解は

$$\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1) \quad (\text{計 } 6 \text{ 個})$$

である. 正ルートは  $\alpha_1 = (1, 0)$ ,  $\alpha_2 = (0, 1)$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1)$  の **3 個**. 平面に描けば, ちょうど正六角形の頂点に並ぶ:



さて, ここで前回までを思い出してほしい.  $A_2$  の直既約  $S_1, S_2, E$  の次元ベクトルは  $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$  であった——これは**正ルートそのもの**である. 直既約を数えていたつもりが, いつのまにかルートを数えていた. これが Gabriel の定理の最小の実例であり, 今回の最大の見どころである.

■**正ルートの個数**.  $ADE$  の各型で, 正ルート (= いずれ直既約と一致する) の個数は次のとおり:

型	$A_n$	$D_n$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
正ルート数 $ \Phi^+ $	$\frac{n(n+1)}{2}$	$n(n-1)$	36	63	120

たとえば  $A_1:1, A_2:3, A_3:6, D_4:12, \dots$  である. いずれも有限個で, しかも美しく閉じている.

## 3 Weyl 群と単純反射

ルート系には, 目をみはるほど豊かな対称性が備わっている. 頂点  $i$  ごとに,  $\mathbb{Z}^{Q_0}$  上の**単純反射**  $s_i$  を

$$s_i(\mathbf{d})_j = \begin{cases} -d_i + \sum_{k:k-i} d_k & (j = i) \\ d_j & (j \neq i) \end{cases}$$

で定める ( $i$  成分だけを「隣のと和 - 自分」に置き換え, 他はそのまま). この  $s_i$  は  $q$  を保ち, 単純ルートを  $\alpha_i \mapsto -\alpha_i$  と裏返す. これら  $s_i$  が生成する群を **Weyl 群**という.

**例 3.1** ( $A_2$  の単純反射).  $s_1(d_1, d_2) = (d_2 - d_1, d_2)$ ,  $s_2(d_1, d_2) = (d_1, d_1 - d_2)$  である. たとえば

$$s_1(\alpha_2) = s_1(0, 1) = (1, 1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_2(\alpha_1) = s_2(1, 0) = (1, 1).$$

反射を繰り返すと、単純ルートからすべての正ルートが生み出される。\$A\_2\$ の Weyl 群は位数 6 の二面体群 \$S\_3\$ で、先の正六角形に並ぶ 6 個のルートに作用する（正六角形そのものの対称群は位数 12 で、Weyl 群はその指数 2 の部分群にあたる）。

## 4 反射関手 (BGP)

ルート系の反射 \$s\_i\$ は、じつは表現のレベルでもそっくり実現される。それが**反射関手** (Bernstein–Gelfand–Ponomarev, 1973) で、Gabriel の定理に構成的な一手で組み立てる——証明を与える代物である。

頂点 \$i\$ が**沈点** (sink ; 入る矢印だけ) または**源点** (source ; 出る矢印だけ) であるとき、\$i\$ につながる矢印の向きをすべて反転させ、新しいクイバー \$s\_i Q\$ を作れる。これに伴って、表現を移す関手

$$S_i^+ : \text{rep}(Q) \rightarrow \text{rep}(s_i Q) \quad (i \text{ が沈点}), \quad S_i^- : \text{rep}(Q) \rightarrow \text{rep}(s_i Q) \quad (i \text{ が源点})$$

が定義される。要点だけ述べれば、こうだ——反射関手 \$S\_i^\pm\$ は、単純表現 \$S\_i\$ だけを「消費」し、それ以外の直既約を反転後のクイバーの直既約へ **1 対 1** に移す。しかも次元ベクトルには、ちょうど単純反射 \$s\_i\$ が作用する : \$\dim(S\_i^\pm V) = s\_i(\dim V)\$。ルート系で起きていた反射が、表現の世界に持ち上がっているのである。

**例 4.1** (\$A\_2\$ で反射関手を見る)。\$Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2\$ では頂点 2 が沈点である。ここに \$S\_2^+\$ を施すと \$s\_2 Q : 1 \leftarrow 2\$ になり、次元ベクトルは \$s\_2(d\_1, d\_2) = (d\_1, d\_1 - d\_2)\$ で移る :

\$Q\$ の直既約	\$\dim\$	\$\xrightarrow{s_2}\$	移り先 \$\dim\$	備考
\$E = M[1, 2]\$	(1, 1)		(1, 0)	\$s_2 Q\$ の直既約へ
\$S_1\$	(1, 0)		(1, 1)	\$s_2 Q\$ の直既約へ
\$S_2\$	(0, 1)		(0, -1)	沈点の単純 \$\Rightarrow\$ 消える (0 へ)

このとおり \$S\_2\$ だけが「消費」され、残りはきちんと反転後の直既約へ移っている。反射を合成した **Coxeter 関手** には向きが二つある。沈点から順に反射する \$C^+ = S\_n^+ \cdots S\_1^+\$ は**射影表現を 0 へつぶす**向きなので、直既約を数え上げるには逆を使う : **逆 Coxeter 関手** \$C^- = S\_1^- \cdots S\_n^-\$ を**射影的直既約**に繰り返し施せば、それを起点として**すべての直既約**が次々と生み出される。Dynkin 型では、これが有限回でびたりと尽きる (入射表現に達して止まる)。これこそ「有限表現型であること」と「直既約 \$\leftrightarrow\$ 正ルート」を、一挙に説明する仕掛けなのである。

## 5 まとめと次回予告

\$q\$ が正定値であることは、台グラフが ADE 型 Dynkin であることに同値であった。ルートとは \$q(\mathbf{d}) = 1\$ の整数解で、正ルートの個数は \$A\_n\$ で \$n(n+1)/2\$、\$D\_n\$ で \$n(n-1)\$、\$E\_6, E\_7, E\_8\$ で 36, 63, 120。そして反射関手 \$S\_i^\pm\$ は直既約を直既約へ移し、次元ベクトルに単純反射 \$s\_i\$ を作用させる——Coxeter 関手を回せば、すべての直既約が生成された。

これで道具がそろった。次回はいよいよ **Gabriel の定理**を述べ、「直既約 \$\leftrightarrow\$ 正ルート」の全単射を \$A\_n, D\_4\$ で具体的に検証し、証明のあらすじと、工学・データ解析への思いがけない応用 (パーシステント・ホモロジー) までを見渡す。

- 
- 演習問題. (1)  $A_3$  型のルート系  $\Phi = \{q(\mathbf{d}) = 1\}$  の正ルートをすべて求め、6 個であること、かつ前回の区間表現の次元ベクトルと一致することを確認せよ.
- (2)  $D_4$  型で、正ルートが 12 個であることを、 $q(\mathbf{d}) = 1$  の非負解を数えて確認せよ (中心の値は  $0, 1, 2$  のいずれか).
- (3)  $A_2$  で単純反射の合成  $s_1s_2$  を  $(1, 0), (0, 1)$  に作用させ、6 個のルートがどう置換されるかを追え. また  $(s_1s_2)^3 = \text{id}$  となることを確認せよ (Coxeter 数 3).
- (4) 反射関手の表 (例 4.1) を、源点 1 における  $S_1^-$  で作り直せ ( $Q: 1 \rightarrow 2$  の頂点 1 は源点だから  $S_1^-$  が使え、 $s_1Q: 1 \leftarrow 2$  へ移る). 次元ベクトルは  $s_1(d_1, d_2) = (d_2 - d_1, d_2)$  で動く. どの単純が消えるかを述べよ.
- (5)  $\text{Kronecker} = \tilde{A}_1$  で、 $q(\mathbf{d}) = 1$  の解 (実ルート) と  $q(\mathbf{d}) = 0$  の解 (零ルート  $(1, 1)$  の整数倍) を比べ、Dynkin との違いを説明せよ.