

## 第 6 回 Gabriel の定理

—直既約とルートが一致する奇跡—

ここまで用意した道具を並べておこう。Krull–Schmidt の定理（直既約への一意分解）、Tits 形式  $q$ （直既約ならば  $q(\dim V) = 1$ ）、「 $q$  正定値  $\iff ADE$  Dynkin」、ルート系（ $q = 1$  の解）、そして反射関手（直既約を動かす）。これらは別々に育ててきたが、今回ひとつに束ねる。

束ねた先に現れるのが **Gabriel の定理**である。それは二つのことを同時に言う——表現が有限個で済むかどうかは台グラフの形だけで決まり、しかもそのとき各直既約は次元ベクトルだけで完全に決まる、と。今回はこの主張を正確に述べ、「直既約  $\leftrightarrow$  正ルート」という全単射を  $A_n, D_4$  で手ずから検証し、証明のあらすじを具体例でつかむ。最後に、この理論が Auslander–Reiten 理論やデータ解析（パーシステント・ホモロジー）へ思いがけず伸びてゆくさまを展望する。

### 1 Gabriel の定理

**定理 1.1** (Gabriel, 1972).  $k$  を（代数閉）体、 $Q$  を連結クイバーとする。

- (1)  $Q$  が有限表現型であることと、その台グラフが  $ADE$  型 *Dynkin* 図形 ( $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ ) であることは同値である。
- (2) このとき、対応  $V \mapsto \dim V$  は

$$\{\text{直既約表現の同型類}\} \xrightarrow{\sim} \Phi^+ \text{ (正ルート全体)}$$

の全単射を与える。とくに直既約の個数は正ルートの個数  $|\Phi^+|$  に等しい。

この定理が二重の奇跡であることを、少し噛みしめてほしい。第一に、表現が有限個で済むかどうかという解析的にも見える問いが、純粋にグラフの形（ $ADE$  かどうか）だけで決着する。第二に、しかも各直既約が次元ベクトルただひとつで完全に決まり、その次元ベクトルは矢印の向きに依らない正ルートである。代数（表現）・幾何（ルート系）・組合せ（Dynkin 図形）の三つが、ここで一点に交わる。これを奇跡と呼ばずして何と呼ぼう。

注意 1.2. 主張 (1)(2)（有限性と直既約  $\leftrightarrow$  正ルートの全単射）は、じつは代数閉とは限らない任意の体上で成立する。代数閉性が本質的に効くのは、むしろ第 3 回の無限型（Kronecker・Jordan）を「固有値・ $\mathbb{P}^1$ 」で具体的に記述する場面である。本講義では一貫して  $k = \mathbb{C}$  を念頭においてよい。

### 2 検証 1: $A_n$ 型

向き  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$  の  $A_n$  では、直既約は区間表現  $M[i, j]$  であった（第 3 回）。その次元ベクトルは「連続した 1 の並び」

$$\dim M[i, j] = (0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{i \leq v \leq j}, 0, \dots, 0)$$

である. 一方,  $A_n$  型の正ルートもまた「連続した 1 の並び」 $\sum_{v=i}^j \alpha_v$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) であり, 個数は  $n(n+1)/2$ . 両者はびたりと重なる:

$$M[i, j] \longleftrightarrow \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j \in \Phi^+.$$

$A_3$  なら直既約 6 個が正ルート 6 個に対応する. そして向きを変えても——たとえば  $1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$  にしても——直既約の個数も, 次元ベクトルの集合も, まったく変わらない. これこそ定理の言う「向きに依らない不変性」である.

### 3 検証 2: $D_4$ 型

次に枝分かかれのある  $D_4$  で確かめよう. 中心 0, 葉 1, 2, 3 (矢印は葉から中心へ) とし, 第 4 回になって次元ベクトルを中心を先頭に  $(d_0; d_1, d_2, d_3)$  と書く.  $q(\mathbf{d}) = 1$  の非負解, すなわち正ルートはちょうど 12 個ある:

|                    |  |       |
|--------------------|--|-------|
| 中心 $d_0 = 0$ (3 個) | $(0; 1, 0, 0), (0; 0, 1, 0), (0; 0, 0, 1)$ |       |
| 中心 $d_0 = 1$ (8 個) | $(1; 0, 0, 0)$                             | 中心の単純 |
|                    | $(1; 1, 0, 0), (1; 0, 1, 0), (1; 0, 0, 1)$ | 葉 1 枚 |
|                    | $(1; 1, 1, 0), (1; 1, 0, 1), (1; 0, 1, 1)$ | 葉 2 枚 |
|                    | $(1; 1, 1, 1)$                             | 葉 3 枚 |
| 中心 $d_0 = 2$ (1 個) | $(2; 1, 1, 1)$                             | 最大ルート |

中心  $d_0 = 1$  の段がちょうど 8 個になる理由を確かめておこう.  $q(\mathbf{d}) = 1$  は,  $d_0 = 1$  のとき  $1 + \sum_i d_i(d_i - 1) = 1$ , すなわち  $\sum_i d_i(d_i - 1) = 0$  を意味する. 各項は非負だから, 葉はすべて  $d_i \in \{0, 1\}$ . したがって葉の選び方  $2^3 = 8$  通りが, そのまま 8 個の正ルートを与える. これに中心  $d_0 = 0$  の 3 個と  $d_0 = 2$  の 1 個を足して,  $3 + 8 + 1 = 12 = |\Phi^+(D_4)| = 4 \cdot 3$ . 第 5 回で数えた 12 個と過不足なく一致した. Gabriel の定理により, これら 12 個それぞれにちょうど一つの直既約表現が対応する.

■最大ルート  $(2; 1, 1, 1)$  の正体: 「平面内の 3 直線」. 最大ルートに対応する直既約は, 目に見える形をしている. 中心に  $V_0 = k^2$  を置き, 3 枚の葉に  $k$  を置き, 3 本の写像  $k \rightarrow k^2$  の像が相異なる 3 本の直線になるようにした表現である. 3 点  $\in \mathbb{P}^1$  は一次変換で標準位置  $\{0, 1, \infty\}$  へ移せるから連続パラメータが残らず, これは (剛い) 直既約ちょうど 1 個に定まる. 次元を数えれば中心 2, 葉それぞれ 1 で, 確かに  $(2; 1, 1, 1)$  である.

注意 3.1 ( $D_4$  と  $\tilde{D}_4$  の境目). 葉を 4 枚にすると  $\tilde{D}_4$  (アフィン型) になり, 中心  $k^2$  内の 4 直線の配置には複比という連続不変量が現れる. その瞬間に直既約は 1 パラメータ族へと崩れ, 無限表現型へ転落する. 「3 直線までは有限, 4 直線で無限」という対比は, Gabriel の定理の境界を肌で感じさせる, またとない好例である.

### 4 証明のあらすじ (例で)

証明には立ち入らないと約束したが, 骨組みだけは見ておこう. 二つの向きに分けて考える.

■(1) 有限  $\Rightarrow$  Dynkin (対偶で). 台グラフが Dynkin でなければ, 必ず拡大 Dynkin (アフィン) 部分図  $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}$  を含む. そこには  $q(\delta) = 0$  をみたす零ルート  $\delta \neq 0$  があり, 次元  $\delta$  の直既約が連続パラメータをもつ族をなす. 第3回の Kronecker  $= \tilde{A}_1$ , 零ルート  $(1, 1)$ ,  $\mathbb{P}^1$  族が, その雛形であった. ゆえに無限表現型である.

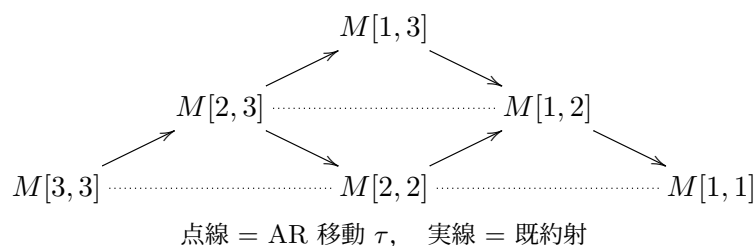
■(2) Dynkin  $\Rightarrow$  有限, かつ直既約  $\leftrightarrow$  正ルート. こちらは三段に分かれる. まず各直既約が正ルートを与える: 直既約  $V$  は剛い ( $\text{End } V = k, \text{Ext}^1(V, V) = 0$ ) から  $q(\dim V) = 1 - 0 = 1$ , すなわち  $\dim V \in \Phi^+$  (第4回). 次に単射性, 同じ次元ベクトルの直既約はただ一つであること: もし  $\dim V = \dim W$  なる非同型の直既約があれば,  $q$  の正定値性と剛性から矛盾が出る (一般位置の議論). 最後に全射性, すべての正ルートが実現されること: 逆 Coxeter 関手  $C^- = S_1^- \cdots S_n^-$  を射影的直既約に繰り返し施すと ( $C^+ = S_n^+ \cdots S_1^+$  は射影をつぶすので逆向きを使う), 正ルートの一つずつ数え上げるように直既約が生成され, Dynkin では有限回でちょうど  $|\Phi^+|$  個に尽きる (第5回).

例 4.1 ( $A_2$  で全部見る). 最小例で全体を見渡しておこう. 正ルートは  $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$  の3つ. 直既約  $S_1, S_2, E$  の次元ベクトルがちょうどこれらで, 各々1個ずつ, どれも  $q = 1$ . 反射  $s_2$  は  $E \leftrightarrow S_1$  を入れ替え,  $S_2$  を消費した (第5回). かくして「3つの直既約  $\leftrightarrow$  3つの正ルート」が定理の言うとおりに成立する. これが Gabriel の定理の, 最小にして完全な実例である.

## 5 展望: 定理の先へ

Gabriel の定理は終着点ではない. むしろ広大な景色への入口である. 三つだけ, その先を覗いておこう.

■Auslander–Reiten 理論: 直既約の「地図」. 直既約をすべて求めるだけでは, じつはまだ半分だ. それらの間の既約な射と AR 移動  $\tau$  を辺として AR クイバーを描くと, 圏  $\text{rep}(Q)$  の全構造が一望できる.  $A_3$  ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ) の AR クイバーは, 次のような三角形になる:



6 個の直既約 (区間表現) と, それらをつなぐ既約射が, 美しい網目をなしている. いわば「表現の周期表」である.

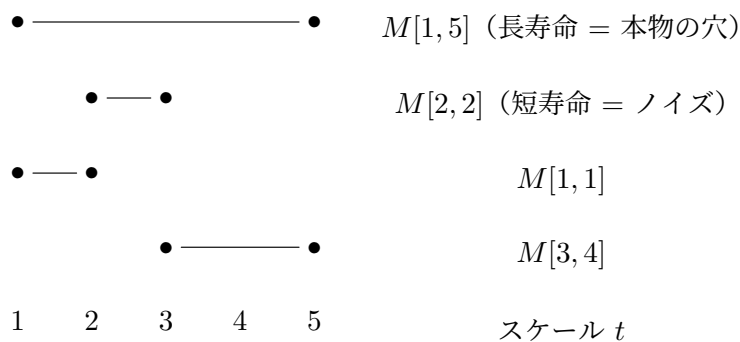
■無限表現型の世界: 従順か, 野性か. Dynkin を外れれば無限表現型だが, そこはさらに二つの世界に分かれる. ひとつは従順型 (tame) で, 拡大 Dynkin (アフィン) 型  $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}$  がこれにあたる. 直既約は  $\mathbb{P}^1$  などの 1 パラメータ族できれいに整理でき, Kronecker や Jordan がその例であった. もうひとつは野性型 (wild) で, それ以外のすべてである. その分類は, 任意の有限次元代数の表現論を丸ごと含んでしまうほど複雑で, 本質的に「手に負えない」. 従順と野性のあいだに中間はない, という二分法そのものが一つの深い定理である. さらに Kac の定理は, 一般のクイバーでも「直既約

のありうる次元ベクトル = 正ルート (実ルート + 虚ルート)」が成り立つことを示し, Gabriel の定理を Kac-Moody Lie 環のルート系へと拡張する.

■工学・データ解析への応用：パーシステント・ホモロジー. 最後に, この理論が現代のデータ解析に直結することを述べたい. 点群データから「スケール  $t$  を上げながら穴の個数を追跡」すると, 各次元のホモロジーが

$$H(t_1) \rightarrow H(t_2) \rightarrow \cdots \rightarrow H(t_n)$$

という線型写像の列, すなわち向きをそろえた  $A_n$  型クイバーの表現 (パーシステンス加群) になる. 第 3 回の分類定理 (=  $A_n$  型の Gabriel) により, これは区間表現  $M[i, j]$  の直和に一意分解し, その区間の多重集合がバーコード (パーシステンス図) として, 「データの穴がどのスケールで生まれ, どこで消えるか」を語る:



区間表現 1 つがバーコード 1 本に対応し, 長い棒が「データに本当に空いた穴」を, 短い棒が「ノイズ」を表す. 画像解析・材料科学・脳科学・センサーネットワークなどで使われる位相的データ解析 (TDA) の数学的な土台が, まさに本講義で学んだ  $A_n$  型クイバーの表現論なのである. 抽象の極みに見えた理論が, こうして応用へと円環していた.

## 6 結語

ループ 1 本の自己準同型 (第 1 回) から出発し, 区間表現・Krull-Schmidt・Tits 形式・ルート系・反射関手を経て, 我々は Gabriel の定理に到達した. 有限表現型であることは台グラフが ADE Dynkin であることに同値で, そのとき直既約は次元ベクトルによって正ルートと一対一に対応する. 表現論・Lie 理論・組合せ論が一点で出会い, 向き付けに依らない不変性が静かに輝いている. そしてその先には, AR 理論, tame/wild の二分法, Kac の定理, クラスター代数, そして TDA への応用が広がっている.

線型代数の「写像 1 本」から始まった問いが, 図形の対称性と現代のデータ解析にまでつながっていた.

これがクイバーの表現論の醍醐味である.

演習問題. (1)  $A_3$  型を向き  $1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$  に変えても直既約が 6 個・次元ベクトルの集合が不変であることを, 区間表現を作り直して確かめよ (向き不依存性の体感).

(2)  $D_4$  の最大ルート  $(2; 1, 1, 1)$  に対応する「平面内の 3 直線」表現を行列で具体的に書き, それが直既約であることを論ぜよ. また 4 直線にすると複比という連続不変量が出ることを確かめよ.

- (3)  $A_2$  型で, Gabriel の定理の主張 (3 直既約  $\leftrightarrow$  3 正ルート) を, 反射関手による生成も込めて自分の言葉で完全に説明せよ.
- (4) パーシステンス加群  $k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k$  ( $A_4$  型) を区間表現に分解し, 対応するバーコードを描け.
- (5) (発展)  $E_8$  型の正ルートが 120 個であることを認め,  $\dim$  の最大値 (最大ルートの座標和) を文献等で調べ, 直既約のうち最も「大きい」ものの次元ベクトルを述べよ.