0 連立一次方程式

- **0-1：連立一次方程式の基本変形**

　まず, 次の連立一次方程式を解くことを考えてみよう.

$$\begin{cases} 2x+3y &= 8 \\ x+2y &= 5 \end{cases}$$

これを式の加減と入れ替えで解いてみる. 以下では ①, ② は連立一次方程式の第 1 行, 第 2 行を表す.

$$\begin{cases} 2x+3y &= 8 \\ x+2y &= 5 \end{cases} \xrightarrow{①+②\times(-2)} \begin{cases} -y &= -2 \\ x+2y &= 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②+①\times 2} \begin{cases} -y &= -2 \\ x &= 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x &= 1 \\ -y &= -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②\times(-1)} \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \end{cases}$$

こうして連立一次方程式の解として $(x, y) = (1, 2)$ を得た. ここで行った変形はすべて「可逆」であることに注意しよう. つまり, ここでの各変形は「同値変形」であり, したがって連立一次方程式の解空間は変化しない. 一般に, 連立一次方程式を解くために行われる次の 3 つの変形は同値変形である.

【連立一次方程式の基本変形】

[**基本変形**]		[**逆変形**]
• 1 つの式の両辺を $t(\neq 0)$ 倍する.	⋯	1 つの式の両辺を $\dfrac{1}{t}$ 倍すること.
• 2 つの式を入れ替える.	⋯	2 つの式を再び入れ替えること.
• 1 つの式の両辺に, 他の式の t 倍を加える.	⋯	1 つの式の両辺に, 他の式の $-t$ 倍を加えること.

　連立一次方程式の基本変形のみを利用して連立一次方程式を解く方法を **掃き出し法** という.

- **0-2：行列の行基本変形**

　連立一次方程式を行列を使って解釈してみよう. 連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad\qquad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

に対して, 未知数の係数を集めた行列 A と右辺の定数を集めた列ベクトル $\mathbf{b}$ を考える:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

行列 A を **係数行列**, $\mathbf{b}$ を **定数項ベクトル** という. また, 行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を **拡大係数行列** という.

　連立一次方程式の基本変形において, 式の中で変化しているのは係数と定数項の部分である. つまり, 変数に関して変形による影響はでていない. 例えば, 連立一次方程式の基本変形を行ったからといって, x が急に z に

変わるということは起きない．そこで, 連立一次方程式の基本変形によって拡大係数行列がどのように変化しているのかを追ってみよう．先の例において, 右側に拡大係数行列を並べた.

$$\begin{cases} 2x+3y &= 8 \\ x+2y &= 5 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①+②\times(-2)} \begin{cases} -y &= -2 \\ x+2y &= 5 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②+①\times 2} \begin{cases} -y &= -2 \\ x &= 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x &= 1 \\ -y &= -2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\times(-1)} \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

これを見れば, 連立一次方程式に施した基本変形に関して, ① と ② を拡大係数行列の第 1 行, 第 2 行と読み替えることにより同等の変形になっていることは明らかである．つまり, 連立一次方程式の基本変形は「拡大係数行列の行における変形」になっているので, これをまとめておこう.

【行列の行基本変形】

[**基本変形**]		[**逆変形**]
• 1 つの行を $t(\neq 0)$ 倍する.	$\cdots$	1 つの行を $\dfrac{1}{t}$ 倍すること.
• 2 つの行を入れ替える.	$\cdots$	2 つの行を再び入れ替えること.
• 1 つの行に, 他の行の t 倍を加える.	$\cdots$	1 つの行に, 他の行の $-t$ 倍を加えること.

• **0-3：行基本変形と基本行列**

次の 3 つのタイプの行列を **基本行列** と呼ぶ.

- n 次単位行列 E_n の i 行目を t ($\neq 0$) 倍した行列 $E_n(i;t)$：

$$E_n(i;t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & t & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

- n 次単位行列 E_n の i 行目と j 行目を入れ替えた行列 $E_n(i,j)$：

$$E_n(i,j) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

- n 次単位行列 E_n の i 行目に j 行目の t 倍を加えた行列 $E_n(i,j;t)$：もし, $i<j$ のときは

$$E_n(i,j;t) := \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & t & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

であり, $i>j$ のときは,

$$E_n(i,j;t) := \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & t & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

行列の行基本変形は, これらの 3 種類からなる基本行列を左からかけることによって実現される．具体的に見てみよう．

例 0-1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{①+②\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

という行基本変形は, 1 行目に 2 行目の -2 倍を加えているので, 行列 $E_2(1,2;-2)$ 用いて

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

となっている．次に

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①\times 2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

という行基本変形は, 2 行目に 1 行目の 2 倍を加えているので, 行列 $E_2(2,1;2)$ 用いて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となっている．次に

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

という行基本変形は, 1 行目と 2 行目を入れ替えているので, 行列 $E_2(1,2)$ 用いて

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

となっている．最後に

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

という行基本変形は, 2 行目を -1 倍しているので, 行列 $E_2(2;-1)$ 用いて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

となっている．以上で，

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&2\end{array}\right)&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&-1&-2\end{array}\right)\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c}0&-1&-2\\1&0&1\end{array}\right)\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c}0&-1&-2\\1&2&5\end{array}\right)\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c}2&3&8\\1&2&5\end{array}\right)\end{aligned}$$

という形で，変形前の行列と変形後の行列を等号で結ぶことができた．

以上の例からもわかるように，行列 A に行基本変形を施すことは，行列にいくつかの基本行列からなる積を左からかけることと対応する．まとめておこう．

【行列の行基本変形と基本行列の関係】

[**行基本変形**]		[**基本行列**]
• i 行目を $t(\neq 0)$ 倍する．	$\cdots$	$E_n(i;t)$ を左からかける．
• i 行目と j 行目を入れ替える．	$\cdots$	$E_n(i,j)$ を左からかける．
• i 行目に，j 行目の t 倍を加える．	$\cdots$	$E(i,j;t)$ を左からかける．

• **0-4：正則行列**

n 次正方行列 A に対して，行列 X が A の **逆行列** であるとは，

$$XA = AX = E_n$$

を満たすときをいう．ここで，E_n は n 次の単位行列である．正方行列 A の逆行列 X は存在すれば唯一つに定まるので，これを記号で A^{-1} で表す．逆行列が存在するような正方行列を **正則行列** と呼ぶ．

補題 0.1. 基本行列は正則行列である．

証明. $t \neq 0$ であるとする．基本行列 $E_n(i;t)$, $E_n(i,j)$, $E_n(i,j,t)$ がそれぞれ逆行列を持てば良い．

- $E_n(i;t)$ の逆行列は $E_n(i;\frac{1}{t})$ である．
- $E_n(i,j)$ の逆行列は $E_n(i,j)$ である．
- $E_n(i,j;t)$ の逆行列は $E_n(i,j;-t)$ である．

以上で，基本行列はすべて正則行列である．□

正則行列の性質を確認しておこう．

補題 0.2. 正方行列 A, B について，次が成り立つ．

(1) A が正則行列であるとき，その逆行列 A^{-1} も正則行列であり $(A^{-1})^{-1} = A$ である．

(2) A, B が正則行列であり，積 AB が計算可能であるとき，AB も正則行列であり $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ．

正則行列 A の逆行列 A^{-1} は次のようにして計算することができる．

命題 0.3. n 次の正則行列 A に対して，新たな行列 $(A \mid E_n)$ は行基本変形のみを用いて $(E_n \mid A^{-1})$ の形に変形することができる．

この命題の意味を具体例を通して確認しておこう.

例 0-2 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

は正則であるが, これの逆行列を求めてみよう.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③+①\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③+②\times2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{②+③\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①+②\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

と基本変形できるから

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

と求めることができた. ここで述べていることは, n 次正則行列 A の逆行列は単位行列 E_n にいくつかの行基本変形を施して得られるということであり, 従って A^{-1} はいくつかの基本行列の積で表示できるという点である. それぞれの行基本行列に対応する基本行列が以下のように対応していることに注意しよう.

右側の行列	基本操作	基本行列
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$② + ① \times (-2)$	$E_3(2,1;-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$③ + ① \times (-1)$	$E_3(3,1;-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$② \leftrightarrow ③$	$E_3(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

右側の行列	基本操作	基本行列
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	③ $+$ ② $\times 2$	$E_3(3,2;2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	② $+$ ③ $\times (-1)$	$E_3(2,3;-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	① $+$ ② $\times (-1)$	$E_3(1,2;-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

従って, A^{-1} は基本行列の積として

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる.

- **0-5：一次独立と一次従属**

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表し, n 個の $\mathbb{R}$ を成分に持つの縦ベクトル全体を $\mathbb{R}^n$ で表す:

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

これを n 次元の **Euclid 空間**（ユークリッド空間）という. $\mathbb{R}^n$ の要素を **n 次元ベクトル** と呼ぶ. $n = 2$ のときは平面ベクトルであり, $n = 3$ のときは空間ベクトルである. 通常の数とベクトルを区別するために, ベクトルは太文字を使って, x, y などと表す.

定義 0.4. k 個のベクトル $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ に対して, 定数 $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ を用いて

$$c_1\mathsf{a}_1 + c_2\mathsf{a}_2 + \cdots + c_k\mathsf{a}_k$$

と表される n 次元ベクトルを, **$\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_k$ の一次結合** と呼ぶ.

例 0-3 $\mathsf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 2 次元ベクトル $\mathsf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は

$$\mathsf{x} = (-1)\mathsf{e}_1 + 2\mathsf{e}_2 = -\mathsf{e}_1 + 2\mathsf{e}_2$$

と表すことができる.

定義 0.5. k 個のベクトル $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}$ 上で **一次独立** であるとは, 実数 $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ によって

$$c_1 + \mathsf{a}_1 + \cdots + c_k\mathsf{a}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

であると仮定すれば, $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ が結論付けられるときをいう. また, $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}$ 上で **一次従属** であるとは, これらが一次独立ではないときをいう.

つまり, k 個の n 次元ベクトル $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}$ 上で一次従属というのは, どれかのベクトルが他のベクトルの一次結合でかけないということである.

例 0-4 $\mathsf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $1_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, これらは一次独立である. 実際, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$c_1 \mathsf{a}_1 + c_2 \mathsf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と仮定すれば,

$$c_1 \mathsf{a}_1 + c_2 \mathsf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

であり, この連立一次方程式を解けば $c_1 = c_2 = 0$ が結論付けられたので, a_1 と a_2 は一次独立である.