1 線形計画問題の標準型

• **1-1 : 線形計画問題の種々の例**

線形とは, 一次式のことである. その意味は, 簡単に言えば結果が原因に「比例」する関係である. 例えば, 1 つ a 円のプリンを x 個購入した合計金額 y は $y = ax$ と表されるように, 1 変数の場合は直線を表す.

線形計画問題とは, 「1 次式からなる制約」のなかで, ある 1 次の目的関数の値を最大, 最小にするための解を求める問題全体を指す. ここでは, 線形計画問題の種々の例を具体的に見てみよう.

例 1-1（生産問題） ある工場では, 原料 K, L, M を用いて A, B, C, D という 4 つの製品を造っている. 各製品を 1(kg) 造るのに必要な各原料と利益は次の表のとおりである.

	A	B	C	D	利用可能量 /(日)
K	5	6	3	7	210
L	2	1	3	1	60
M	3	4	5	1	60
利益	4	5	3	6	(万/kg)

この工場では, どの製品を何キログラムずつ造れば利益は最大になるかを考えよう.

[定式化]

製品 A, B, C. D をそれぞれ x_1(kg), x_2(kg), x_3(kg), x_4(kg) 造るとする. このとき, 制約条件は次のようになる.

$5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 210$ 原料 K の必要量と利用可能量の制約式
$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 60$ 原料 L の必要量と利用可能量の制約式
$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 60$ 原料 M の必要量と利用可能量の制約式
$x_1 \geq 0$ 製造量は 0 (kg) 以上である.
$x_2 \geq 0$ 製造量は 0 (kg) 以上である.
$x_3 \geq 0$ 製造量は 0 (kg) 以上である.
$x_4 \geq 0$ 製造量は 0 (kg) 以上である.

この制約のもとで, 利益に関する目的関数

$$z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4$$

を最大にすれば良い. これらを次のように表記する:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Maximize} & z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 \\
\textbf{Subject to} & 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 210 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 60 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 60 \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{array}$$

例 1-2（栄養問題） m 種類の食品 $F_1, F_2, \ldots, F_m$（米, パン, 卵など）と n 種類の栄養素 $G_1, G_2, \ldots, G_n$（タンパク質, 炭水化物, ビタミン A など）があって, 次の値が定められているとする:

a_{ij} : 1 単位あたりの食品 F_i が含む栄養素 G_j の量
d_j : 健康を保つために, 1 日に摂取すべき栄養素 G_j の量
b_i : 1 単位あたりの食品 F_i の価格

このとき, すべての栄養素を必要以上取りながら総費用を最小にするには各食品をどれだけ購入すればよいか考えよう.

[定式化]

$i = 1, 2, \ldots, m$ について, 食品 F_i を y_i 単位購入することにすれば, 制約条件は次のようになる.

$$\begin{array}{ll} a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m) & \text{1 日あたりに摂取すべき栄養素 } G_j \text{ の制約式} \\ y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) & \text{それぞれの食品は 0 単位以上必要である.} \end{array}$$

この制約のもとで, 費用に関する目的関数

$$z = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

を最小にすれば良い. これらを次のように表記する:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & z = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ \textbf{Subject to} & a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \\ & y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \end{array}$$

例 1-3（輸送問題） ある会社は工場 $A_1, \ldots, A_m$ で製品を製造し, それを n 個の取引先 $B_1, \ldots, B_n$ に納品している. このとき, 次の値が定められているとする:

c_{ij} : 工場 A_i から取引先 B_j への単位量あたりの輸送費

s_i : 工場 A_i における生産量

d_j : 取引先 B_j における需要量

ただし, 需要と生産の間には

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

が成り立っていなければならないとする. つまり, 需要に必要十分な量のみを生産するということである. このときの合理的な輸送計画を立てよう. これは, 各工場の生産量と各取引先の需要量に関する制約条件を満たしつつ, 輸送費を最小にすればよい.

[定式化]

$i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ について, 工場 A_i から取引先 B_j まで x_{ij} だけ輸送するとする. このとき, 制約条件は次のようになる.

$$\begin{array}{ll} x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} \leq s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) & \text{1 日あたりに工場 } A_i \text{ が生産する量に関する制約} \\ x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} \geq d_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n) & \text{1 日あたりに取引先 } B_j \text{ が必要とする量に関する制約} \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n) & \text{それぞれの製品は 0 単位以上輸送される.} \end{array}$$

この制約のもとで, 輸送費用に関する目的関数

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

を最小にすれば良い. これらを次のように表記する:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \textbf{Subject to} & x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} \leq s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} \geq d_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n) \end{array}$$

これまでみてきた具体例のように, 連立一次方程式や連立一次不等式からなる制約条件の下で, 一次方程式からなる目的関数の値を最大, もしくは最小にする問題を **線形計画問題** あるいは単に **LP 問題** と呼ぶ.

レポート 1-1 容量が C 単位の倉庫があり, この倉庫には初めに A だけの商品が格納されている. $i = 1, 2, \ldots, n$ として, 第 i 期中に単価 b_i で製品を y_i だけ売却し, 第 i 期末に単価 c_i で製品を x_i だけ仕入れる. このとき, n 期間における総利益を最大にするには各期にどれだけ売却すればよいか. 変数 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ に関する線形計画問題として定式化せよ.

• 1-2： 線形計画問題の標準型

LP 問題には, 生産計画問題や輸送問題のように様々なタイプがあり, これら異なるタイプの LP 問題を統一的に扱うためにその「標準形」を以下のように設定する.

【LP 問題の標準形】

変数を $x_1, \ldots, x_n$ として, 以下のように定式化された LP 問題を **LP 問題の標準型** と呼ぶ.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\textbf{Subject to} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}
$$

ただし, a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$, b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は定数であって, それぞれの $i = 1, 2, \ldots, m$ について $b_i \geq 0$ を満たす.

つまり, 行列で表すと次の通りである.

【LP 問題の標準形の行列表示】

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathsf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $\mathsf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$, $\mathsf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とし, $\mathbf{0}$ を零ベクトルとする.

以下のように定式化された LP 問題を **LP 問題の標準型** と呼ぶ.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = \mathsf{cx} \\
\textbf{Subject to} & A\mathsf{x} = \mathsf{b} \\
& \mathsf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

ただし, $\mathsf{b} \geq \mathbf{0}$ である.

ここで, n 次元ベクトル $\mathsf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$ において,

$$
\mathsf{y} \geq \mathsf{y}' \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad y_i \geq y'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)
$$

であることと定義する.

• 1-3： 線形計画問題の標準型への変形

次に行うことは, これまでに見てきた具体例のような LP 問題を「標準型」になおすことである. 当然, 標準型というからには, 任意の LP 問題を標準形になおすことができる. その手順を述べよう.

①：目的関数 z を最大にする LP 問題

新たな目的関数 $z' := -z$ を考えて, z' を最小化する問題に読み替える.

②：制約式のうちいくつかが不等式である LP 問題

制約式に $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ があるとき, 非負の **スラック変数** と呼ばれる自分で用意したダ

ミーの変数 x_{n+i} を導入して

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

と書き換える．

　また, 制約式に $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ があるとき, 非負のスラック変数 x_{n+i} を導入して

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

と書き換える．

③：制約式のうち $b_i < 0$ となる b_i がある LP 問題

　制約式の $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ について, $b_i < 0$ のときは, $b_i' := -b_i$ とおいて,

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n = b_i'$$

と書き換える．

④：制約式のうち $x_i < 0$ がある LP 問題

　新たな変数 $y_i := -x_i$ を考えて, 変数変換を行う．

⑤：変数 x_i に関して, 正負に関する条件がない LP 問題

　新たな変数 $y_i^{(1)} \geq 0$, $y_i^{(2)} \geq 0$ を考えて, $x_i = y_i^{(1)} - y_i^{(2)}$ と書き換えて変数変換する．

　以上の手続きを行うことで, 任意の LP 問題はその標準型に変換することができる．では, 実際に標準化を行ってみよう．

例 1-4　**例 1-1** の生産問題を標準型に書き換える．これは以下のような LP 問題であった:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Maximize} & z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 \\
\textbf{Subject to} & 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 210 \\
 & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 60 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 60 \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{array}$$

　まず, ①を用いて最小化に関する問題に変換する．その後, 制約条件は一次不等式であるから, ②によって, スラック変数 x_5, x_6, x_7 を用いることで以下のように書き換わる．

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z' = -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 6x_4 \\
\textbf{Subject to} & 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 = 210 \\
 & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 60 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + x_7 = 60 \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
\end{array}$$

レポート 1-2　**例 1-2** および**例 1-3** を標準化せよ．

- **1-4： 実行可能解**

　線形計画法は, 標準型の LP 問題の「等式からなる制約条件」に「非負条件を満たす解」が存在するかを調べ, もし存在すればその中で目的関数を最小にするものをみつけよ, という考え方に基づいている．

等式からなる制約式	連立一次方程式 $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$
	$\Downarrow$
連立一次方程式の解全体	$\{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathsf{x} = \mathsf{b}\}$
	$\Downarrow$
非負条件	$K := \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathsf{x} \geq \mathbf{0},\ A\mathsf{x} = \mathsf{b}\}$
	$\Downarrow$
最小化	$\mathsf{x} \in K$ のうち $z = \mathsf{c}\mathsf{x}$ を最小とするものを見つける.

ところが, そもそも制約式にある連立一次方程式 $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ を満たす解が存在しなければ, その LP 問題における最適な解の存在はあり得ない. そこで, 今後は「変数の数 n」が「方程式の数 m」よりも多いと仮定して, これら m 個の中には無駄な式が含まれていないと仮定する. つまり, $m \times n$ 行列 A の階数 $\mathsf{rank}(A)$ は m であることを仮定して議論を進めることにしよう.

上のフローチャートにおける K は, LP 問題の（最適とは限らないが）解全体である.

定義 1.1. 標準型である LP 問題の制約条件 $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$, $\mathsf{x} \geq \mathbf{0}$ を満たす $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n$ をその LP 問題の **実行可能解** と呼ぶ. 実行可能解のうち, 目的関数 $z = \mathsf{c}\mathsf{x}$ を最小にする x を, その LP 問題の **最適解** という.