2 凸集合と端点解

ここでは, LP 問題における制約条件がつくる凸多面体と解の間の関係性について観察しよう.

• 2-1 : 凸集合

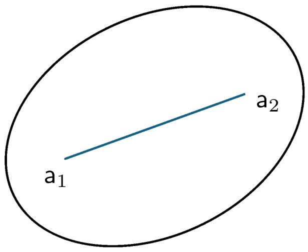
定義 2.1. (a) 2 つの n 次元ベクトル $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して, 集合

$$\{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathsf{x} = \lambda \mathsf{a}_1 + (1-\lambda)\mathsf{a}_2,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

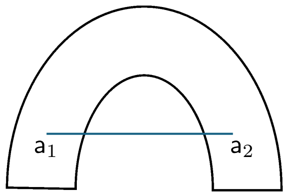
を $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2$ が結ぶ **線分** と呼ぶ.

(b) 部分集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が **凸集合** であるとは, S に属しているような任意の n 次元ベクトル $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 \in S$ に対して, その線分が S に含まれているときをいう.

(c) 部分集合 $T \subset \mathbb{R}^n$ を含む包含関係に関して最も小さい凸集合を T の **凸包** という.



凸集合



凸集合ではない

例 2-1 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{R}^2$ における半径 r の円板 $\mathbb{D} := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, $\mathbb{R}^2$ における多角形は凸集合である.

命題 2.2. S_i $(i \in I)$ を凸集合の族とする. このとき, これらの共通部分 $\bigcap_{i \in I} S_i$ はまた凸集合となる.

証明. 任意に $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 \in \bigcap_{i \in I} S_i$ をとる. このとき, 全ての $i \in I$ で S_i は凸集合なのだから, $0 \leq \lambda \leq 1$ について $\mathsf{a}_1 + (1-\lambda)\mathsf{a}_2 \in S_i$ である. $i \in I$ は任意だったから $\mathsf{a}_1 + (1-\lambda)\mathsf{a}_2 \in \bigcap_{i \in I} S_i$. よって $\bigcap_{i \in I} S_i$ は凸集合である. □

• 2-2 : 凸多面体

LP 問題における制約条件がつくる凸多面体を考察するために, まずは凸多面体の定義を与える.

定義 2.3. $\mathsf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ をとり, これは零ベクトルでないとする. 定数 $b \in \mathbb{R}$ をとる. このとき, $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\mathcal{H}(\mathbf{a}, b) := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; {}^t\mathsf{a}\mathsf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \right\}$$

を a と b が定める **超平面** と呼ぶ. また,

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{a}, b) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid {}^t\mathsf{a}\mathsf{x} \geq b\}$$

を a と b が定める **半空間** と呼ぶ. ここで, ${}^t\mathsf{a}$ は a の転置を表す.

例 2-2 $\mathsf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $b = -1$ とする．このとき，これらから定まる超平面と半空間は

$$\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, -1\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x - 3y = -1 \right\}$$
$$\hat{\mathcal{H}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, -1\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x - 3y \geq -1 \right\}$$

である．

命題 2.4. 超平面および半空間は凸集合である．

証明. 任意に零ベクトルでない $\mathsf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と定数 $b \in \mathbb{R}$ をとる．これらが定める超平面 $\mathcal{H}(\mathsf{a}, b)$ が凸集合であることを証明しよう．任意の $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 \in \mathcal{H}(\mathsf{a}, b)$ と実数 $0 \leq \lambda \leq 1$ をとる．

$$\mathsf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$a_1 a_{i1} + a_2 a_{i2} + \cdots + a_n a_{in} = b \quad (i = 1, 2)$$

を満たす．このとき，

$$\lambda \mathsf{a}_1 + (1 - \lambda)\mathsf{a}_2 = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} - (1 - \lambda) a_{21} \\ \vdots \\ \lambda a_{1n} - (1 - \lambda) a_{2n} \end{pmatrix}$$

が $\mathcal{H}(\mathsf{a}, b)$ に属していることを示せばよいことになる．そこで，これの第 i 成分を y_i とおくと，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i a_{1i} + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{n} a_i a_{2i} = \lambda b + (1 - \lambda) b = b$$

であるから，$\lambda \mathsf{a}_1 + (1 - \lambda)\mathsf{a}_2 \in \mathcal{H}(\mathsf{a}, b)$ がわかった．よって，$\mathcal{H}(\mathsf{a}, b)$ は凸集合である．半空間も同様に証明することができる． □

レポート 2-1 半空間の場合の証明を完成させよ．

定義 2.5. 有限個の半空間の共通部分を **凸多面体** という．**命題 2.2** と**命題 2.4** によって，凸多面体は凸集合であることに注意せよ．

LP 問題の解と，凸多面体の関係をみるには，「2 変数の LP 問題の図形的開放」を見るとイメージがつきやすい．

例 2-3 次の LP 問題を図形的に解いてみよう．

$$\begin{array}{rll} \textbf{Maximize} & z = x + y & \\ \textbf{Subject to} & 3x + y \leq 9 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ & x + 2y \leq 8 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ & x \geq 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ & y \geq 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{array}$$

制約条件のそれぞれ①, ②, ③, ④が定める半空間を考える．

①: これは, $-3x-y\geq -9$ と同値なので, $\hat{\mathcal{H}}_1 := \hat{\mathcal{H}}\left(\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, -9\right)$ とおく.

②: これは, $-x-2y\geq -8$ と同値なので, $\hat{\mathcal{H}}_2 := \hat{\mathcal{H}}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}, -8\right)$ とおく.

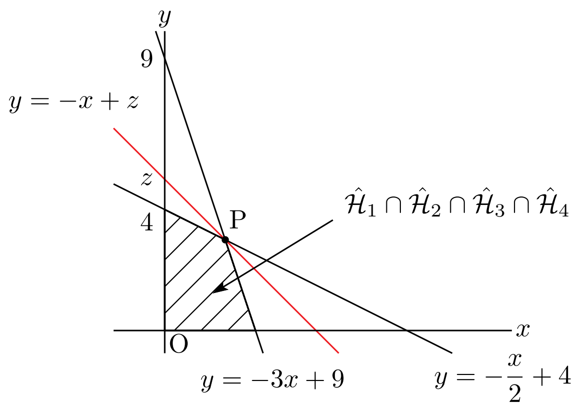
③: $\hat{\mathcal{H}}_3 := \hat{\mathcal{H}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, 0\right)$ とおく.

④: $\hat{\mathcal{H}}_4 := \hat{\mathcal{H}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, 0\right)$ とおく.

つまり, 考察している LP 問題の制約式を満たす $\mathbb{R}^2$ の部分集合は

$$\hat{\mathcal{H}}_1\cap\hat{\mathcal{H}}_2\cap\hat{\mathcal{H}}_3\cap\hat{\mathcal{H}}_4$$

という凸多面体に他ならない. この凸多面体を平面に図示すると次のようになる.



さて, 目的関数 $z=x+y$ を $y=-x+z$ と変形すれば, 求める最適解は凸多面体 $\hat{\mathcal{H}}_1\cap\hat{\mathcal{H}}_2\cap\hat{\mathcal{H}}_3\cap\hat{\mathcal{H}}_4$ に入るような (x,y) であって y 切片 z が最大となるようなものであるから, 直線 $y=-x+z$ が点 P を通過すれば良い. 点 P の座標は $(2,3)$ であるから, 最大値は 5 である.

レポート 2-2　次の LP 問題を考える:

$$\begin{array}{ll}\textbf{Minimize} & z=-x-y\\ \textbf{Subject to} & 2x+y\leq 9\\ & x+3y\leq 12\\ & x\geq 0,\quad y\geq 0\end{array}$$

(1) 制約式が与える半空間を求め, それらはどのようなベクトル a と定数 b から定まるか答えよ.

(2) すべての制約式が定める凸多面体を図示せよ.

(3) この LP 問題を解け.

- **2-3 : 制約条件がつくる凸多面体**

標準化された LP 問題の制約条件が, $m\times n$ 行列 A と n 次元ベクトル x および m 次元ベクトル b を用いて

$$A\mathsf{x}=\mathsf{b}$$

で与えられているとしよう. これの実行可能解の全体の集合を K とおく:

$$K=\{\mathsf{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\mathsf{x}=\mathsf{b},\ \mathsf{x}\geq\mathbf{0}\}$$

ここで, $\mathsf{x}\geq\mathbf{0}$ は全ての成分が 0 以上であることと定義していたことに注意しておく.

命題 2.6. K は凸集合である.

証明. K は m 個の超平面と n 個の半空間の共通部分であり, **命題 2.2** と**命題 2.4** から K は凸集合である. □

定義から, K は空集合であるか, 有界な凸多面体であるか, 有界でない凸多面体である.

例 2-3 を見れば, LP 問題の解は凸多面体（今の場合は四角形）の頂点に最適解があった. 一般の LP 問題の場合も, その最適解は K の「頂点」にあることが予想できる. しかし, 一般に K は高次元であるため, 「頂点」に対応する概念を導入する必要がある.

定義 2.7. 凸集合 S の元 $\mathsf{x} \in S$ が S の **端点** であるとは, $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in S$ と $0 < \lambda < 1$ を用いて

$$\mathsf{x} = \lambda \mathsf{x}_1 + (1-\lambda)\mathsf{x}_2$$

と表そうとしたとき, 必ず $\mathsf{x} = \mathsf{x}_1$ または $\mathsf{x} = \mathsf{x}_2$ が成り立つときをいう. また, S の元 $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_k \in S$ の **凸結合** とは, 次の形の $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_k \in S$ の一次結合である：

$$\lambda_1 \mathsf{a}_1 + \lambda \mathsf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathsf{a}_k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, k)$$

証明はしないが, 次の結果は線形計画法の基本的な定理である.

定理 2.8 (Minkowski–Steinitz–Weyl)**.** 有界な凸多面体は有限個の点の凸包であり, これらはこの凸多面体の端点全体をなす. これらの端点の凸結合全体は凸多面体と一致する.

次の定理は, 後に学ぶ「シンプレックス法」の幾何的解釈である.

定理 2.9. K は有界な凸多面体であるとする. このとき, 目的関数は K のある端点で最小値をとる. また, いくつかの端点で最小値をとるならば, それらのいかなる凸結合に対しても最小値をとる.

証明. 仮定と**定理 2.8** によって, K は有限個の端点 $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \dots, \mathsf{x}_p$ をもつと仮定できる. 目的関数

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} =: {}^t\mathsf{c}\mathsf{x}$$

が $\mathsf{x}_0 \in K$ で最小値をとるとしよう. すなわち, 任意の $\mathsf{y} \in K$ で ${}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_0 \leq {}^t\mathsf{c}\mathsf{y}$ が成り立つ. **定理 2.8** により $\mathsf{x}_0 \in K$ は K の端点の凸結合で表すことができる. つまり,

$$\mathsf{x}_0 = \alpha_1 \mathsf{x}_1 + \alpha_2 \mathsf{x}_2 + \cdots + \alpha_p \mathsf{x}_p, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, p)$$

と表示できる. いま, ${}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_l = \min_{1 \leq i \leq p} {}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_i$ とおく. このとき,

$${}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_0 = {}^t\mathsf{c} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathsf{x}_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i {}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_i \geq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i {}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_l = {}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_l$$

が成り立つ. 一方, $\mathsf{x}_0 \in K$ で目的関数 z は最小値をとるので ${}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_0 \leq {}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_l$ である. 従って, ${}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_0 = {}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_l$ となり, K のある端点で z は最小値をとることがわかった.

次に, 目的関数 z が K の端点 $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \dots, \mathsf{x}_q$ で最小値をとるとすると, それらの凸結合

$$\mathsf{y} = \beta_1 \mathsf{x}_1 + \beta_2 \mathsf{x}_2 + \cdots + \beta_q \mathsf{x}_q, \quad \sum_{i=1}^{q} \beta_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, q)$$

でも最小値をとることを示す．このとき，

$$ {}^t\mathsf{c}\mathsf{y} = {}^t\mathsf{c}\sum_{i=1}^{q}\beta_i\mathsf{x}_i = \sum_{i=1}^{q}\beta_i{}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_i = \sum_{i=1}^{q}\beta_i{}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_1 = {}^t\mathsf{c}\mathsf{x}_1 $$

となり，z は y でも最小値をとることがわかった． □

- **2-4：実行可能基底解とその幾何的考察**

行列 A が $m \times n$ 行列として，標準化された LP 問題

$$ \begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & z = {}^t\mathsf{c}\mathsf{x} \\ \textbf{Subject to} & A\mathsf{x} = \mathsf{b}, \quad \mathsf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} $$

を再び考察する．集合 K を，この LP 問題の実行可能解全体とする．ただし，ここでは

$$ m \leq n, \quad K \text{ は有界な凸多面体}, \quad \mathsf{rank}(A) = m $$

と仮定する．$m \leq n$ という仮定を課していたことに注意しておこう．　ここで，$\mathsf{x} \geq \mathbf{0}$ を利用して n 個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ のうち $(n-m)$ 個の変数に 0 を代入するという暴挙にでてみると，残っている変数の数は m 個となるので，制約式にある連立一次方程式の式の数と変数の個数が一致する．このとき，この連立一次方程式は解が唯一つに決まるか，あるいは解なしである．

定義 2.10. 標準化された LP 問題の制約条件に対して，$(n-m)$ 個の変数に 0 を代入したとき，m 個の変数に対する m 個の連立一次方程式が唯一の解をもてば，これを 0 と置いた変数も含めて **基底解** と呼ぶ．この残っている m 個の変数を **基底変数** と呼び，基底解が実行可能解であるとき，**実行可能基底解** と呼ぶ．

例 2-4　次のような LP 問題を考えよう:

$$ \begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & z = -3x_1 - 8x_2 \\ \textbf{Subject to} & 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 27 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 16 \\ & 4x_1 + x_2 + x_5 = 18 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} $$

これに対して，$x_1 = x_2 = 0$ とおき，x_3, x_4, x_5 を基底変数とすれば，$x_3 = 27, x_4 = 16, x_5 = 18$ である．よって，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 27, 16, 18)$ は実行可能基底解である．

レポート 2-3　**例 2-4** で扱った LP 問題について，x_1, x_2, x_4 を基底変数とするような基底解は実行可能基底解であるか調べよ．

定理 2.9 によって，標準化された LP 問題の制約条件が定める凸多面体 K の端点に注目すればよかった．2 変数の場合はグラフをかけば視覚的に端点をみつけることができたが，変数が増えればそのような方法は通用しない．そこで，実行可能な端点をみつける方法について考えよう．

命題 2.11. 標準化された LP 問題の制約条件に現れる連立一次方程式が $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ であって，この係数行列を $A = \begin{pmatrix} \mathsf{p}_1 & \cdots & \mathsf{p}_n \end{pmatrix}$ で表したとする．これら列ベクトルのうち，k 個の一次独立なベクトル $\mathsf{p}_{i_1}, \ldots, \mathsf{p}_{i_k}$ を用いて，

$$ x_{i_1}\mathsf{p}_{i_1} + x_{i_2}\mathsf{p}_{i_2} + \cdots + x_{i_k}\mathsf{p}_{i_k} = \mathsf{b} $$

となるような $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \geq 0$ が存在すれば，

$$ \begin{array}{cccccccccc} & & i_1\text{ 番目} & & i_2\text{ 番目} & & & i_k\text{ 番目} & \\ \mathsf{x} = & {}^t(0\cdots0 & x_{i_1} & 0\cdots0 & x_{i_2} & \cdots & 0\cdots0 & x_{i_k} & 0\cdots0) \end{array} $$

は実行可能な K の端点である．

証明. 必要であれば変数の番号を適当に付け替えることで, A の初めの k 個の列ベクトル $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_k$ が一次独立であるとしても一般性を失わない. 仮定より,

$$x_1\mathsf{p}_1 + x_2\mathsf{p}_2 + \cdots + x_k\mathsf{p}_k = \mathsf{b}$$

である. 示すことは, $\mathsf{x} = {}^t(x_1 \cdots x_k\ 0 \cdots 0)$ が K の端点であるということである. これを背理法で示そう. ベクトル x は K の端点ではないから, K の x とは異なる $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in K$ $(\mathsf{x}_1 \neq \mathsf{x}_2)$ を用いて

$$\mathsf{x} = \lambda\mathsf{x}_1 + (1-\lambda)\mathsf{x}_2 \quad (0 < \lambda < 1)$$

と表すことができる. このとき, $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \geq \mathbf{0}$ だったから, これらのうしろ $(n-k)$ 個の成分は 0 である. そこで,

$$\mathsf{x}_1 = {}^t(y_1 \cdots y_k\ 0 \cdots 0), \quad \mathsf{x}_2 = {}^t(z_1 \cdots z_k\ 0 \cdots 0)$$

とおくと, これらは $A\mathsf{x}_1 = \mathsf{b}$, $A\mathsf{x}_2 = \mathsf{b}$ を満たすので

$$(y_1 - z_1)\mathsf{p}_1 + (y_2 - z_2)\mathsf{p}_2 + \cdots + (y_k - z_k)\mathsf{p}_k = \mathbf{0}$$

である. $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_k$ は一次独立なので,

$$y_1 - z_1 = 0, \quad y_2 - z_2 = 0, \quad \ldots, \quad y_k - z_k = 0$$

であり, これは $\mathsf{x}_1 = \mathsf{x}_2$ ということを表す. これは矛盾なので, $\mathsf{x} = {}^t(x_1 \cdots x_k\ 0 \cdots 0)$ が K の端点である. □

命題 2.12. 標準化された LP 問題の制約条件に現れる連立一次方程式が $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ であって, この係数行列を $A = \begin{pmatrix} \mathsf{p}_1 & \cdots & \mathsf{p}_n \end{pmatrix}$ で表したとする. ベクトル $\mathsf{x} = {}^t(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ が K の端点であるとする. もし, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} > 0$ であれば, $\mathsf{p}_{i_1}, \ldots, \mathsf{p}_{i_k}$ は一次独立である.

証明. 変数の番号を適当に付け替えることで, $x_1, \ldots, x_k > 0$ としても一般性を失わない. このとき, $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ なので,

$$x_1\mathsf{p}_1 + x_2\mathsf{p}_2 + \cdots + x_k\mathsf{p}_k = \mathsf{b}$$

が成り立つ. k 個の列ベクトル $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_k$ が一次独立であることを背理法で示そう. $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_k$ は一次従属であると仮定すれば, ある $(d_1, \ldots, d_k) \neq (0, \ldots, 0)$ によって,

$$d_1\mathsf{p}_1 + d_2\mathsf{p}_2 + \cdots + d_k\mathsf{p}_k = \mathbf{0}$$

とできる. 新たに 2 つのベクトル

$$\mathsf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + td_1 \\ \vdots \\ x_k + td_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{z} := \begin{pmatrix} x_1 - td_1 \\ \vdots \\ x_k - td_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおけば, $A\mathsf{y} = \mathsf{b}$, $A\mathsf{z} = \mathsf{b}$ が成り立つ. $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} > 0$ であったから, 十分に小さい $t > 0$ を考えればすべての $i = 1, 2, \ldots, k$ について

$$x_i + td_i > 0, \quad x_i - td_i > 0$$

とできる. この $t > 0$ に対して, $\mathsf{y}, \mathsf{z} \in K$ であるが,

$$\frac{1}{2}\mathsf{y} + \frac{1}{2}\mathsf{z} = \mathsf{x}$$

だが, これは $\mathsf{x} \in K$ が K の端点であることに矛盾する. □

以上で次がわかった,

定理 2.13. ベクトル $\mathsf{x} \in K$ が K の端点であることと実行可能基底解であることは同値である.