3 シンプレックス法

• 3-1 : 端点解から新たな端点解を得る方法

例 3-1 次の LP 問題を考えよう.

$$\begin{array}{ll}\textbf{Minimize} & z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + 22x_5 \\ \textbf{Subject to} & x_1 - 2x_4 + x_5 = 6 \\ & x_2 + x_4 - 4x_5 = 3 \\ & x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

まず, x_1, x_2, x_3 を基底変数とすれば, $\mathsf{x}_0 = {}^t(6, 3, 10, 0, 0)$ は実行可能基底解である. このとき, 目的関数 z の値は

$$z = 2 \cdot 6 - 3 + 10 - 5 \cdot 0 + 22 \cdot 0 = 19$$

である. では, 別の実行可能基底解で目的関数の値を小さくできるか調べてみよう. 制約式を変形すれば

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_4 + x_5 = 6 \\ x_2 + x_4 - 4x_5 = 3 \\ x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 10 \end{array} \iff \begin{array}{l} x_1 = 6 + 2x_4 - x_5 \\ x_2 = 3 - x_4 + 4x_5 \\ x_3 = 10 - 3x_4 - 2x_5 \end{array}$$

であるから, これらを z に代入して

$$\begin{aligned} z &= 2(6 + 2x_4 - x_5) - (3 - x_4 + 4x_5) + (10 - 3x_4 - 2x_5) - 5x_4 + 22x_5 \\ &= 19 - 3x_4 + 14x_5 \end{aligned}$$

である. これより, x_4 を 1 増やせば z は 3 減少し, x_5 を 1 増やせば z は 14 増加する. z の値をなるべく小さくしたいので, x_4 を含む実行可能基底解を求めてみよう.

与えられた制約条件より

$$\mathsf{p}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_4 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

とおき, $A := (\mathsf{p}_1\ \mathsf{p}_2\ \mathsf{p}_3\ \mathsf{p}_4\ \mathsf{p}_5)$ とおくことにすれば, x_0 は連立方程式 $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ の解なので

$$6\mathsf{p}_1 + 3\mathsf{p}_2 + 10\mathsf{p}_3 = \mathsf{b}$$

を満たす. いま, p_4 を含む実行可能基底解を求めたいので p_4 を $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \mathsf{p}_3$ の一次結合で表してみると $\mathsf{p}_4 = -2\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + 3\mathsf{p}_3$ である. このとき, ε を定数として

$$\begin{aligned} & 6\mathsf{p}_1 + 3\mathsf{p}_2 + 10\mathsf{p}_3 = \mathsf{b} \\ \iff\ & 6\mathsf{p}_1 + 3\mathsf{p}_2 + 10\mathsf{p}_3 + \varepsilon\mathsf{p}_4 - \varepsilon\mathsf{p}_4 = \mathsf{b} \\ \iff\ & 6\mathsf{p}_1 + 3\mathsf{p}_2 + 10\mathsf{p}_3 + \varepsilon\mathsf{p}_4 - \varepsilon(-2\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + 3\mathsf{p}_3) = \mathsf{b} \\ \iff\ & (6 + 2\varepsilon)\mathsf{p}_1 + (3 - \varepsilon)\mathsf{p}_2 + (10 - 3\varepsilon)\mathsf{p}_3 + \varepsilon\mathsf{p}_4 = \mathsf{b} \end{aligned}$$

- もし, p_1 を消去すれば, $\varepsilon = -3$ であり, ${}^t(0\ 6\ 19\ \ {-3}\ 0)$ は実行可能解ではないので不適.
- もし, p_2 を消去すれば, $\varepsilon = 3$ であり, ${}^t(12\ 0\ 1\ \ {-3}\ 0)$ は実行可能基底解である.
- もし, p_3 を消去すれば, $\varepsilon = \dfrac{10}{3}$ であり, ${}^t(\frac{38}{3}\ \ {-\frac{1}{3}}\ 0\ \frac{10}{3}\ 0)$ は実行可能解ではないので不適.

以上より, p_2 を消去して新たな実行可能基底解 ${}^t(12\ 0\ 1\ \ {-3}\ 0)$ を得たが, このときの z の値は

$$z = 2 \cdot 12 + 1 - 5 \cdot 3 = 10$$

でより小さい値とできた.

レポート 3-1 LP 問題

$$\begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & z = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\ \textbf{Subject to} & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ & -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ & -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

について, 制約条件を与える連立一次方程式の係数行列 A を求めよ．また, $A = (\mathsf{p}_1\ \mathsf{p}_2\ \mathsf{p}_3\ \mathsf{p}_4\ \mathsf{p}_5\ \mathsf{p}_6)$ とおくとき, A の列ベクトル $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \ldots, \mathsf{p}_6$ のうち一次独立になるものの最大個数が 3 であることを示せ．また, $\mathsf{p}_2, \mathsf{p}_3, \mathsf{p}_5$ を $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_4, \mathsf{p}_6$ の一次結合で表せ．

- **3-2：最適解であるかの判定**

LP 問題の実行可能解空間の全体 K が有界ならば **定理 2.9** によって K の端点にあり, それは **定理 2.13** によって実行可能基底解である．そこで, 新たに得た実行可能基底解が最適解かどうかの判定をする方法について考察しよう．

定義 3.1. 標準化された LP 問題の実行可能基底解 x_0 の 0 でない成分が, 制約条件の等式の数 m となるときに x_0 は **非退化** であるという．

以下, 標準化された LP 問題

$$\begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & z = {}^t\mathsf{c}\mathsf{x} \\ \textbf{Subject to} & A\mathsf{x} = \mathsf{b} \\ & \mathsf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

について, $K \neq \varnothing$ であって, 実行可能基底解はすべて非退化であると仮定しよう．このとき, A は $m \times n$ 行列で $\mathrm{rank}(A) = m$ であり, $A = (\mathsf{p}_1\ \mathsf{p}_2\ \cdots \mathsf{p}_n)$ のはじめの m 個の列ベクトルは一次独立である．これの実行可能基底解

$$\mathsf{x}_0 = {}^t\begin{pmatrix} x_{10} & \cdots & x_{m0} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K, \quad x_{i0} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

が与えられていたとする．また, 次のように設定しておく．

$$\begin{aligned} z_0 &:= c_1x_{10} + c_2x_{20} + \cdots + c_mx_{m0} \\ \mathsf{b} &:= x_{10}\mathsf{p}_1 + x_{20}\mathsf{p}_2 + \cdots + x_{m0}\mathsf{p}_m \\ \mathsf{p}_j &:= x_{1j}\mathsf{p}_1 + x_{2j}\mathsf{p}_2 + \cdots + x_{mj}\mathsf{p}_m \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ z_j &:= c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \cdots + c_mx_{mj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

命題 3.2. ある j について, $z_j - c_j > 0$ であれば, 目的関数 z の値を z_0 より小さくする別の実行可能基底解が存在する．

証明. $\varepsilon \neq 0$ をある定数とする．

$$\mathsf{b} - \varepsilon\mathsf{p}_j = (x_{10} - \varepsilon x_{1j})\mathsf{p}_1 + (x_{20} - \varepsilon x_{2j})\mathsf{p}_2 + \cdots + (x_{m0} - \varepsilon x_{mj})\mathsf{p}_m \qquad (*)$$

であり,

$$z_0 - \varepsilon z_j = (x_{10} - \varepsilon x_{1j})c_1 + (x_{20} - \varepsilon x_{2j})c_2 + \cdots + (x_{m0} - \varepsilon x_{mj})c_m$$

となる．これの両辺に εc_j を加えると

$$z_0 + \varepsilon(c_j - z_j) = (x_{10} - \varepsilon x_{1j})c_1 + (x_{20} - \varepsilon x_{2j})c_2 + \cdots + (x_{m0} - \varepsilon x_{mj})c_m + \varepsilon c_j$$

ここで, $(*)$ における係数について

$$x_{10} - \varepsilon x_{1j} \geq 0, \quad x_{20} - \varepsilon x_{2j} \geq 0, \quad x_{m0} - \varepsilon x_{mj} \geq 0, \quad \varepsilon > 0$$

であれば, 新たな実行可能解を得たことになる. このときの z の値は

$$z = z_0 + \varepsilon(c_j - z_j) < z_0$$

となり, 値を小さくすることができた. 仮定より, 実行可能基底解は非退化なので $k = 1, 2, \ldots, m$ で $x_{k0} > 0$ だから ε を十分小さくすれば $x_{k0} - \varepsilon x_{kj} \geq 0$ とできる. よって題意を示すことができた. □

定理 3.3. ある実行可能基底解 $\mathsf{x}_0 := {}^t(x_{10} \ \cdots \ x_{m0} \ 0 \cdots 0)$ に対して, すべての j について, $z_j - c_j \leq 0$ であれば, x_0 は最適解である.

証明. 任意に $\mathsf{y} \in K$ をとる. 仮定から $z_j \leq c_j$ なので

$$z(\mathsf{y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j x_{ij} c_i$$

である. 一方,

$$\mathsf{b} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathsf{p}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{k=1}^{m} x_{ki} \mathsf{p}_k \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j x_{ij} \mathsf{p}_i$$

また, x_0 は実行可能基底解であって, $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_m$ が一次独立だから

$$x_{i0} = \sum_{j=1}^{n} y_j x_{ij} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

である. 従って,

$$z(\mathsf{y}) \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j x_{ij} c_i = \sum_{i=1}^{m} x_{i0} c_i = z(\mathsf{x}_0)$$

を得る. これは, x_0 が最適解であることを示している. □

- **3-3：シンプレックス法**

　ここまで論じてきたことを用いて, 与えられた LP 問題を代数的に解くアルゴリズムは **シンプレックス法** または **単体法** と呼ばれる.

例 3-2　はじめの LP 問題を考えよう.

$$\begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + 22x_5 \\ \textbf{Subject to} & x_1 - 2x_4 + x_5 = 6 \\ & x_2 + x_4 - 4x_5 = 3 \\ & x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

初期解として実行可能基底解 $\mathsf{x}_0 = {}^t(6 \ 3 \ 10 \ 0 \ 0)$ をとり, ここから最適解を求めていこう. 目的関数より, $c_1 = 2, \ c_2 = -1, \ c_3 = 1, \ c_4 = -5, \ c_5 = 22$ である.

$$\mathsf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \mathsf{p}_3$ を基底として各 p_j を表して, z_j を計算すると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{p}_1 &= 1\cdot\mathsf{p}_1 + 0\cdot\mathsf{p}_2 + 0\cdot\mathsf{p}_3 & z_1 &= 1\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 0\cdot 1 = 2\\
\mathsf{p}_2 &= 0\cdot\mathsf{p}_1 + 1\cdot\mathsf{p}_2 + 0\cdot\mathsf{p}_3 & z_2 &= 0\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 = -1\\
\mathsf{p}_3 &= 0\cdot\mathsf{p}_1 + 0\cdot\mathsf{p}_2 + 1\cdot\mathsf{p}_3 & z_3 &= 0\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 1\\
\mathsf{p}_4 &= (-2)\cdot\mathsf{p}_1 + 1\cdot\mathsf{p}_2 + 3\cdot\mathsf{p}_3 & z_4 &= (-2)\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 3\cdot 1 = -2\\
\mathsf{p}_5 &= 1\cdot\mathsf{p}_1 + (-4)\cdot\mathsf{p}_2 + 2\cdot\mathsf{p}_3 & z_5 &= 1\cdot 2 + (-4)\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 8
\end{aligned}
$$

である. ここで, $z_i - c_i$ を計算すれば

$$
z_1 - c_1 = 0, \quad z_2 - c_2 = 0, \quad z_3 - c_3 = 0, \quad z_4 - c_4 = 3, \quad z_5 - c_5 = -14
$$

だから, p_4 を基底に組み込む. また, **例 3-1** で計算した $\varepsilon = \dfrac{\mathsf{b}\text{ の成分}}{\mathsf{p}_4\text{ の成分}}$ の値は $\varepsilon = -3, 3, \dfrac{10}{3}$ であった. これらのうち, 正の数で最小なものを選べば z を減少させられるので, 基底から p_2 を外す.

今度は, 先の操作を $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_4, \mathsf{p}_3$ を基底として行う.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{p}_1 &= 1\cdot\mathsf{p}_1 + 0\cdot\mathsf{p}_2 + 0\cdot\mathsf{p}_3 & z_1 &= 1\cdot 2 + 0\cdot(-5) + 0\cdot 1 = 2\\
\mathsf{p}_2 &= 2\cdot\mathsf{p}_1 + 1\cdot\mathsf{p}_2 + (-3)\cdot\mathsf{p}_3 & z_2 &= 2\cdot 2 + 1\cdot(-5) + (-3)\cdot 1 = -4\\
\mathsf{p}_3 &= 0\cdot\mathsf{p}_1 + 0\cdot\mathsf{p}_2 + 1\cdot\mathsf{p}_3 & z_0 &= 0\cdot 2 + 0\cdot(-5) + 1\cdot 1 = 1\\
\mathsf{p}_4 &= (-2)\cdot\mathsf{p}_1 + 1\cdot\mathsf{p}_2 + 3\cdot\mathsf{p}_3 & z_4 &= 0\cdot 2 + 1\cdot(-5) + 0\cdot 1 = -5\\
\mathsf{p}_5 &= 1\cdot\mathsf{p}_1 + (-4)\cdot\mathsf{p}_2 + 2\cdot\mathsf{p}_3 & z_5 &= (-7)\cdot 2 + (-4)\cdot(-5) + 14\cdot 1 = 20
\end{aligned}
$$

であり, $z_i - c_i$ を計算すれば

$$
z_1 - c_1 = 0, \quad z_2 - c_2 = -3, \quad z_3 - c_3 = 0, \quad z_4 - c_4 = 0, \quad z_5 - c_5 = -2
$$

である.

$$
\mathsf{b} = 12\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_3 + 3\mathsf{p}_4
$$

であって, $z_i - c_i$ の値が全て 0 以下なので, **定理 3.3** より実行可能基底解

$$
\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

は最適解であって, 最適値は $z = 10$ である.

ここまでの操作を **シンプレックスタブロー** と呼ばれる次のような表でまとめるとわかりやすい.

	基底	c_i	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	b	ε
	p_1	2	1	0	0	-2	1	6	$-3 = \dfrac{6}{-2}$
$\Leftarrow$	p_2	-1	0	1	0	1	-4	3	$3 = \dfrac{3}{1}$
	p_3	1	0	0	1	3	2	10	$\dfrac{10}{3}$
$z_i - c_i$			0	0	0	3	-14		
	p_1	2	1	2	0	0	-7	12	
	p_4	-5	0	1	0	1	-4	3	
	p_3	1	0	-3	1	0	14	1	
$z_i - c_i$			0	-3	0	0	-2		

上の表の見方を説明しておこう.

(1) まず, あらかじめ与えた実行可能基底解を与える基底変数 x_1, x_2, x_3 に対応する列ベクトル $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \mathsf{p}_3$ を左側に書く.

(2) 次に $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \ldots, \mathsf{p}_5, \mathsf{b}$ を $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \mathsf{p}_3$ の一次結合で表して, その係数を並べる.

(3) 非基底変数 x_4, x_5 のうち, 基底変数として取り入れたいものを選ぶ. 今の場合は x_4 なので p_4 と b の列に注目し, 行ごとに $\varepsilon = \dfrac{\mathsf{b}\text{ の成分}}{\mathsf{p}_4\text{ の成分}}$ を計算して ε の列に書き込む.

(4) ε の値のうち, 正の数で最小なものをひとつ選び, その行に対応するベクトルを基底から外す. 今の場合は $\varepsilon = 3$ で p_2 を外す. 外すベクトルの前に $\Leftarrow$ と書く.

(5) 入れたい基底 p_4 と外したい基底 p_2 に注目して, 「p_4 の列が, p_2 のあった行が 1, 他が 0」となるように, タブローに対して行基本変形をする.

(6) これらを $z - c_i \leq 0$ となるまで繰り返す.

レポート 3-2 次の LP 問題を解け.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\
\textbf{Subject to} & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\
 & -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\
 & -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$