4　人工基底と二段階法

- **4-1 : 人工基底**

これまでは, 与えられた LP 問題は実行可能であって, はじめの基底として使用できるものを含んでいた. しかし, 実際にはそのようなものがあるとも限らないし, 実行可能かどうかもわからない. このような問題に対してシンプレックス法を用いるための方法を示す. まず, 標準化された LP 問題 P が与えられているとしよう.

$\boxed{\text{問題 P}}$

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\textbf{Subject to} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \qquad\qquad\vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}
$$

このとき, ω を十分大きな正の数として次の問題 P' を考える.

$\boxed{\text{問題 P'}}$

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + {\color{red}+\omega(t_1 + t_2 + \cdots + t_m)} \\
\textbf{Subject to} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n {\color{red}+t_1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n {\color{red}+t_2} = b_2 \\
& \qquad\qquad\vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n {\color{red}+t_m} = b_m \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad {\color{red}t_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, m)}
\end{array}
$$

定義 4.1. 問題 P' の実行可能基底解として,

$$
\mathsf{x}_0 := {}^t(\overbrace{0\ 0 \cdots\ 0}^{n}, b_1\ b_2 \cdots\ b_m) \in \mathbb{R}^{n+m}
$$

が与えられるが, これに対応する一次独立なベクトル $\mathsf{p}_{n+1}, \ldots, \mathsf{p}_{n+m}$ を問題 P に対する **人工基底** と呼ぶ. このとき, 新たに加えた変数 $t_1, \ldots, t_m$ を **人工変数** という.

注意 4.2. 人工変数は, 必ずしも m 個を新たに付け加える必要はない. もとの問題 P のなかに, 実行可能基底解の一部として使える部分があるならば, その分だけを採用して足りない分を人工変数として導入すれば良い.

$\boxed{\text{問題 P}}$を解くために, 人工基底を用意した$\boxed{\text{問題 P'}}$について考察しよう. 最終的には, $\boxed{\text{問題 P}}$の解が欲しいので

$$
t_1 + t_2 + \cdots + t_m = 0
$$

となって欲しい. つまり, $\boxed{\text{問題 P'}}$の目的関数の一部である $\omega(t_1 + t_2 + \cdots + t_m)$ を 0 にしたい. そこで, 新たな関数

$$
w = t_1 + t_2 + \cdots + t_m = 0
$$

を用意して, 次の LP 問題を考える.

$\boxed{\text{問題 P'-I}}$

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & {\color{red}w = t_1 + t_2 + \cdots + t_m = 0} \\
\textbf{Subject to} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + t_1 = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + t_2 = b_2 \\
& \qquad\qquad\vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + t_m = b_m \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad t_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, m)
\end{array}
$$

これを LP 問題 P' の **フェーズ I 問題** という.

• 4-2： 二段階法

命題 4.3. フェーズ I 問題の最適値が 0 でないことと, 問題 P が実行可能ではないことは同値である.

証明. **（必要条件）** 背理法で示す．問題 P の実行可能解として $\mathrm{x}_0 = {}^t(x_{10}\ x_{20}\ \cdots\ x_{n0})$ があったとする．このとき, $i = 1, 2, \ldots, m$ で等式

$$a_{i1}x_{10} + a_{i2}x_{20} + \cdots + a_{in}x_{n0} = b_i$$

が成立する．このとき, ベクトル x_0 に m 個の 0 を後ろに付け加えた $\mathrm{x}_1 = {}^t(x_{10}\ x_{20}\ \cdots\ x_{n0}\ 0\ \cdots\ 0)$ をとれば, これはフェーズ I 問題の実行可能解である．このときの目的関数 w の値は 0 であるが, これはフェーズ I 問題の最適値が 0 ではないことに仮定に反する.

（十分条件） 背理法で示す．フェーズ I 問題は実行可能基底解をもつので実行可能である．フェーズ I 問題の最適値が 0 であると仮定しよう．このときの最適解を $\mathrm{x}_1 = {}^t(x_{1,1}\ x_{2,1}\ \cdots\ x_{m+n,1})$ とすれば, $x_{n+1,1} = \cdots = x_{n+m,1} = 0$ である．このとき, $\mathrm{x}_0 = {}^t(x_{1,1}\ x_{2,1}\ \cdots\ x_{n,1})$ をとれば問題 P の実行可能解である．これは仮定に反する. □

例 4-1 次の LP 問題を考えよう.

$$\begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & z = -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\ \textbf{Subject to} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

これのフェーズ I 問題を設定する．人工変数として t_1, t_2 を導入しよう．このときの対応する一次独立な列ベクトルを q_1, q_2 とする.

$$\begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & w = t_1 + t_2 \\ \textbf{Subject to} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + t_1 = 5 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + t_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, t_1, t_2 \geq 0 \end{array}$$

これにシンプレックス法を施す．実行可能基底解として ${}^t(0\ 0\ 0\ 5\ 10)$ が取れることに注意する．シンプレックスタブローを作成すれば以下のようになる.

	基底	c_i	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1	q_2	b	ε
$\Leftarrow$	q_1	1	2	-1	2	3	1	0	5	$\frac{5}{2}$
	q_2	1	1	2	1	-1	0	1	10	$\frac{10}{1}$
$w_i - c_i$			3	1	3	2	0	0		
	p_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	-5
$\Leftarrow$	q_2	1	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{15}{2}$	3
$w_i - c_i$			0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0		
	p_1	0	1	0	1	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	4	
	p_2	0	0	1	0	-1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3	
$w_i - c_i$			0	0	0	0	-1	-1		

シンプレックスタブローの最後の行はすべて 0 以下となっているのでフェーズ I 問題の最適解として ${}^t(4\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0)$ を得て, 最適値は 0 となる．すなわち, もとの LP 問題は実行可能である.

フェーズ I 問題は, もとの LP 問題の実行可能性を調べていた．このとき, 実行可能であれば, 目的関数を w から z に切り替えてもとの LP 問題の最適解を求める問題に移行することになる．このとき, もとの LP 問題は **フェーズ II 問題** と呼ばれる．このように, はじめにフェーズ I 問題によって実行可能性を調べ, その後もとの LP 問題の最適解を探す手法を **二段階法** という．　フェーズ I 問題の最適解を与える基底がもとの LP 問題 P の実行可能基底解を与えるとき, その基底を用いてシンプレックス法を実行することで問題 P の最適解を得ることができる．

フェーズ II 問題を解き始める際, フェーズ I 問題を解く際に用いたシンプレックスタブローを用いることができる．例えば, **例 4-1** ではフェーズ II 問題の実行可能基底解として $\mathsf{x}_0 = (4\ 3\ 0\ 0)$ を用いることができるが, シンプレックスタブローもフェーズ I 問題の最後に現れた部分から始めれば良い．このとき, 目的関数が変化しているので, c_i の列と $z_i - c_i$ の列は計算し直す必要がある．

基底	c_i	p_1	p_2	p_3	p_4	b	ε
p_1	-1	1	0	1	1	4	
p_2	1	0	1	0	-1	-3	
$z_i - c_i$		0	0	2	-2		

注意 4.4. 二段階法を利用する際, 必ずしもフェーズ I 問題とフェーズ II 問題に分けてタブローを作成する必要ない．フェーズ I 問題で作成されたタブローは, フェーズ II 問題を解くためのタブローとして引き継げば良いのである．そのために, タブローの $z_i - c_i$ の部分を $z_i - c_i$ のパートと $w_i - c_i$ のパートの 2 行に分けて作成し, 人工基底が基底変数から外れた段階で $w_i - c_i$ の行を消去すればよいのである．具体的には, タブローとして次の形のものから出発しても差し支えない．

基底	c_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	q_1	q_2	$\cdots$	q_m	b	ε
q_1	ω	a_{11}	$\cdots$	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1	
q_2	ω	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$	0	1	$\cdots$	0	b_2	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
q_m	ω	a_{m1}	$\cdots$	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m	
$z_i - c_i$		$-c_1$	$\cdots$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0		
$w_i - c_i$		$\sum_{i=1}^m a_{i1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^m a_{in}$	0	0	$\cdots$	0		

- $z_j - c_j$ の ω の係数を $m+2$ 行に, 残りを $m+1$ 行に記入する．つまり, 注目している列からなるベクトルと c_i にあるベクトルの内積から c_i を引いたもののうち, ω の係数は $m+2$ 行目に, 定数は $m+1$ 行目に記入する．
- まず, $m+2$ 行目の成分が全て正でなくなるまでシンプレックス法を繰り返す．次に $m+2$ 行目の 0 の上の $m+1$ 行目の成分が正で無くなるまで繰り返す．

注意 4.5. フェーズ I 問題を解く, あるいは初めから問題 P' をタブローを使って解くとき人工基底である $\mathsf{q}_1, \dots, \mathsf{q}_m$ の列に関する計算は不要である．これは, 人工変数が一度基底から外れたら戻さないということと, 基底に入っているときには単位ベクトルで不変という理由から記録を残しておく必要がないからである．

例 4-2　以下の LP 問題を標準形に直し, 二段階法を使って最適解と最適値を求めよう．

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Maximize} & z = -2x_1 - x_2 \\
\textbf{Subject to} & -3x_1 - x_2 \le -3 \\
 & 4x_1 + 3x_2 \ge 6 \\
 & x_1 + 2x_2 \ge 2 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

この LP 問題を標準形に直して，人工基底 t_1, t_2, t_3 を用いて表示すると次のようになる．

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = 2x_1 + x_2 + \omega t_1 + \omega t_2 + \omega t_3 \\
\textbf{Subject to} & 3x_1 + x_2 - x_3 + t_1 = 3 \\
 & 4x_1 + 3x_2 - x_4 + t_2 = 6 \\
 & x_1 + 2x_2 - x_5 + t_3 = 2 \\
 & x_i, t_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 5, \quad j = 1, 2, 3)
\end{array}
$$

これを二段階法で解いていく．x_i に対応するベクトルを p_i, t_j に対応するベクトルを q_j とおく．

	基底	c_i	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	q_1	q_2	q_3	b	ε
$\Leftarrow$	q_1	ω	3	1	-1	0	0	1	0	0	3	1
	q_2	ω	4	3	0	-1	0	0	1	0	6	$3/2$
	q_3	ω	1	2	0	0	-1	0	0	1	2	2
$z_i - c_i$			-2	-1	0	0	0	0	0	0		
$w_i - c_i$			8	6	-1	-1	-1	0	0	0		
	p_1	2	1	$1/3$	$-1/3$	0	0	$\ast$	0	0	1	3
	q_2	ω	0	$5/3$	$4/3$	-1	0	$\ast$	1	0	2	$6/5$
$\Leftarrow$	q_3	ω	0	$5/3$	$1/3$	0	-1	$\ast$	0	1	1	$3/5$
$z_i - c_i$			0	$-1/3$	$-2/3$	0	0	$\ast$	0	0		
$w_i - c_i$			0	$10/3$	$5/3$	-1	-1	$\ast$	0	0		
	p_1	2	1	0	$-2/5$	0	$1/5$	$\ast$	0	$\ast$	$4/5$	-2
$\Leftarrow$	q_2	ω	0	0	1	-1	1	$\ast$	1	$\ast$	1	1
	p_2	1	0	1	$1/5$	0	$-3/5$	$\ast$	0	$\ast$	$3/5$	3
$z_i - c_i$			0	-0	$-3/5$	0	$-1/5$	$\ast$	0	$\ast$		
$w_i - c_i$			0	0	1	-1	1	$\ast$	0	$\ast$		
	p_1	2	1	0	0	$-2/5$	$3/5$	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$6/5$	2
$\Leftarrow$	p_3	0	0	0	1	-1	1	$\ast$	$\ast$	$\ast$	1	1
	p_2	1	0	1	0	$1/5$	$-4/5$	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$2/5$	$-1/2$
$z_i - c_i$			0	-0	0	$-3/5$	$2/5$	$\ast$	$\ast$	$\ast$		
$w_i - c_i$			0	0	0	0	0	$\ast$	$\ast$	$\ast$		
	p_1	2	1	0	$-3/5$	$1/5$	0	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$3/5$	
	p_5	0	0	0	1	-1	1	$\ast$	$\ast$	$\ast$	1	
	p_2	1	0	1	$4/5$	$-3/5$	0	$\ast$	$\ast$	$\ast$	$6/5$	
$z_i - c_i$			0	-0	$-2/3$	$-1/5$	0	$\ast$	$\ast$	$\ast$		

上のタブローが示す通り，4 回目のサイクルで $w_i - c_i$ の行に正の数がなくなったので，元の LP 問題の実行可能基底解が得られている．また，5 回目のサイクルで $z_i - c_i$ の行に正の数がなくなったので元の LP 問題の最適解 ${}^t(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 0, 1)$ が得られて，このときの最適値として $\frac{12}{5}$ を得た．

レポート 4-1　次の LP 問題を標準形に直して二段階法で解け．

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = 4x_1 + 3x_2 \\
\textbf{Subject to} & x_1 + 3x_2 \geq 12 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 10 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 9 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

- **4-3：人工変数が残るケース**

まず，以下の命題のような状況だと，人工変数が含まれない理想的なケースとなる．

命題 4.6. すべての実行可能基底解が非退化な LP 問題のフェーズ I 問題の最適解に現れる基底変数には，人工変数が含まれない．

証明. フェーズ I 問題の最適解に現れる基底変数が $y_1, \ldots, y_m$ であるとする．このなかに人工変数 t_j が含まれていれば, 最適値が 0 なので $t_j = 0$ でなくてはならない．非基底変数の値は 0 なので, この最適解には $n - m + 1$ 個以上の 0 を含むことになるが, これは非退化であることに反する． □

人工基底を導入して二段階法を実行したとき, 結果として次の 3 パターンとなる．

(Case 1) フェーズ I 問題の最適値が 0 より大きい．つまり, ある人工基底 t_j が正となる最適解を得る．
(Case 2) フェーズ I 問題の最適値が 0 であり, 基底解に対応する基底変数に人工変数が含まれない．
(Case 3) フェーズ I 問題の最適値が 0 であり, 基底解に対応する基底変数に人工変数が含まれる．

ここまでの説明によって, (Case 1) のときは元の LP 問題は実行不可能であることがわかり, (Case 2) のときは元の LP 問題の実行可能基底解を得ているのでフェーズ II 問題に移行できる．

問題は (Case 3) のときである．この場合はもとの LP 問題をシンプレックス法を即座に適用できる状況に変換されていない．この場合の取り扱いについて考えていこう．フェーズ I 問題を終了したときの基底変数が $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ であるとする．これらを用いてフェーズ I 問題が終了したときの辞書が

$$
\begin{array}{rcl}
w & = & \overline{w} + d_{j_1} x_{j_1} + \cdots + d_{j_m} x_{j_n} \\
x_{i_1} & = & \overline{b_1} + \overline{a}_{1,j_1} x_{j_1} + \cdots + \overline{a}_{1,j_m} x_{j_n} \\
 & \vdots & \\
x_{i_m} & = & \overline{b_m} + \overline{a}_{m,j_1} x_{j_1} + \cdots + \overline{a}_{m,j_m} x_{j_n}
\end{array}
$$

であったとする．基底変数の中の人工変数の 1 つを x_{i_1} としておこう．このとき成り立つ式を改めて書くと

$$x_{i_1} = \overline{b_1} + \overline{a}_{1,j_1} x_{j_1} + \cdots + \overline{a}_{1,j_m} x_{j_n}$$

である．フェーズ I 問題の最適値が 0 なので $\bar{b}_1 = 0$ である．

もし, ある $\overline{a}_{1,j_k} \neq 0$ かつ x_{j_k} が人工変数ではないならば

$$x_{j_k} = -\frac{x_{i_1}}{\overline{a}_{1,j_k}} + \frac{\overline{a}_{1,j_1}}{\overline{a}_{1,j_k}} x_{j_1} + \cdots + \frac{\overline{a}_{1,j_{k-1}}}{\overline{a}_{1,j_k}} x_{j_{k-1}} + \frac{\overline{a}_{1,j_{k+1}}}{\overline{a}_{1,j_k}} x_{j_{k+1}} + \cdots + \frac{\overline{a}_{1,j_n}}{\overline{a}_{1,j_k}} x_{j_n}$$

とできる．この関係式を用いて, x_{j_k} を基底変数に加えて x_{i_1} を非基底変数から外すことができる．

人工変数でない全ての x_{j_k} の係数 $\overline{a}_{1,j_k}$ が 0 のとき, 人工変数のみの式を得ていることになり, その式を消去することができる．その場合は元々の LP 問題から作られる係数行列のランクが m より小さいことになり, 制約式のなかには冗長な式が含まれていることになる．その式を消去し次元が 1 つ低い基底を用いてフェーズ II 問題に移行できる．