5 双対問題

- **5-1 ： 双対問題**

解きたい LP 問題があったとき, その形が複雑である場合, その LP 問題を解くことと同値な問題であって, 更に最適解もしくは最適値を得ることができないだろうか. その同値な問題がもとの LP 問題を解くより易ければなお良い. その一つの答えが「双対問題」である.

標準化された LP 問題 P が次のように与えられているとする.

問題 P

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\textbf{Subject to} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)
\end{array}
$$

これに対して, 以下で定まる LP 問題 Q を問題 P の **双対問題** と呼び, 問題 P を **主問題** と呼ぶ.

問題 Q

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Maximize} & w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
\textbf{Subject to} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\
 & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \leq c_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_m
\end{array}
$$

行列で表示した方が簡潔である.

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathsf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathsf{y} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_m \end{pmatrix},
$$

としたとき, 標準化された LP 問題

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = \mathsf{cx} \\
\textbf{Subject to} & A\mathsf{x} = \mathsf{b} \\
 & \mathsf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

に対する双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Maximize} & w = \mathsf{yb} \\
\textbf{Subject to} & \mathsf{y}A \leq \mathsf{c}
\end{array}
$$

ここで, $\mathsf{y}A \leq \mathsf{c}$ は各成分ごとに不等号が成立するという意味である.

定理 5.1 (弱双対定理)**.** 主問題に対する任意の実行可能解を x, その双対問題の任意の実行可能解を y とする. このとき, 不等号 $\mathsf{yb} \leq \mathsf{cx}$ が成り立つ. 特に等号が成立するとき, x は主問題の最適解であり, y は双対問題の最適解である.

証明. 主問題に対する任意の実行可能解を x, その双対問題の任意の実行可能解を y とおくと,

$$
A\mathsf{x} = \mathsf{b}, \quad \mathsf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathsf{y}A \leq \mathsf{c}
$$

が成り立つ. 従って,

$$
\mathsf{cx} \geq \mathsf{y}A\mathsf{x} = \mathsf{yb}
$$

である.

次に等号 $\mathsf{yb} = \mathsf{cx}$ が成り立つと仮定する. 主問題の任意の実行可能解 x' をとると,

$$\mathsf{cx}' \geq \mathsf{yb} = \mathsf{cx}$$

が成り立つので x は主問題の最適解である. また, 双対問題の任意の実行可能解 y' をとると,

$$\mathsf{y}'\mathsf{b} \leq \mathsf{cx} = \mathsf{yb}$$

が成り立つので y は双対問題の最適解である. □

- **5-2 : 双対定理**

双対問題を考察することと, 主問題を考察することが同値であることを示すのが次に示す双対定理である.

定理 5.2 (双対定理)**.** 主問題, あるいはその双対問題のどちらか一方が有限の最適解をもてば, 他方も有限の最適解をもち, 両者の最適値は等しい. また, どちらか一方の問題の目的関数の値が有界でなければ, 他方の問題は実行可能ではない.

証明. 標準化された LP 問題が次のように与えられていたとする.

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \mathsf{cx} \\
\textbf{Subject to} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \qquad\qquad\vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\
& \\
\Longleftrightarrow & A\mathsf{x} = \mathsf{b}, \quad \mathsf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}$$

(主問題が有限な最適解をもつとき) : このとき, 一般性を失うことなくその最適解を与える基底変数を $x_1, x_2, \ldots, x_m$ としてもよい. つまり, 主問題の制約条件に現れる連立一次方程式 $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ の係数行列 $A = (\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_n)$ の最初の m 列 $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_m$ が最終的な最適解を与える基底ベクトルであるとしてもよい. 正則行列 B を $B = (\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_m)$ とおけば,

$$B^{-1}A = (E_m,\ B^{-1}\mathsf{p}_{m+1},\ B^{-1}\mathsf{p}_{m+2},\ \ldots,\ B^{-1}\mathsf{p}_n)$$

となる. 連立一次方程式 $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ より $B^{-1}A\mathsf{x} = B^{-1}\mathsf{b}$ であるから最適解を与える実行可能基底解は

$$\widetilde{\mathsf{x}} := \begin{pmatrix} B^{-1}\mathsf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

で与えられる.

以下, 示すことは双対問題も実行可能であり, その最適値が主問題のそれと一致することである. m 次元横ベクトル c_0 を

$$\mathsf{c}_0 = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
\mathsf{c}_0B^{-1}A - \mathsf{c} &= \mathsf{c}_0(E_m,\ B^{-1}\mathsf{p}_{m+1},\ B^{-1}\mathsf{p}_{m+2},\ \ldots,\ B^{-1}\mathsf{p}_n) - \mathsf{c} \\
&= (c_1, c_2, \ldots, c_m,\ \mathsf{c}_0B^{-1}\mathsf{p}_{m+1},\ \mathsf{c}_0B^{-1}\mathsf{p}_{m+2},\ \ldots,\ \mathsf{c}_0B^{-1}\mathsf{p}_n) - \mathsf{c} \\
&= (0, \ldots, 0,\ \mathsf{c}_0B^{-1}\mathsf{p}_{m+1} - c_{m+1},\ \mathsf{c}_0B^{-1}\mathsf{p}_{m+2} - c_{m+2},\ \ldots,\ \mathsf{c}_0B^{-1}\mathsf{p}_n - c_n) \\
&= (0, \ldots, 0, z_{m+1} - c_{m+1}, z_{m+2} - c_{m+2}, \ldots, z_n - c_n) \leq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

である. ここで, 最後の不等号は **命題 3.2** から成り立つ.

さて, $\mathsf{y}_0 := \mathsf{c}_0 B^{-1}$ とおくと,

$$\mathsf{y}_0 A - \mathsf{c} = \mathsf{c}_0 B^{-1} A - \mathsf{c} \leq \mathbf{0}$$

だから $\mathsf{y}_0 A \leq \mathsf{c}$ となり, y_0 は双対問題の実行可能解である. 更に,

$$\mathsf{y}_0 \mathsf{b} = \mathsf{c}_0 B^{-1} \mathsf{b} = \mathsf{c}\widetilde{\mathsf{x}}$$

となり最適値が一致しているので **定理 5.1** によって y_0 が双対問題の最適解である.

(双対問題が有限の最適解をもつとき): 双対問題は

$$\begin{array}{ll} \textbf{Maximize} & w = \mathsf{y}\mathsf{b} \\ \textbf{Subject to} & \mathsf{y}A \leq \mathsf{c} \end{array}$$

で与えられる. このとき, スラック変数 $\mathsf{y}_3 = \begin{pmatrix} y_{m+1} & \cdots & y_{m+n} \end{pmatrix}$ を用意して, 与えられた双対問題の制約条件は

$$\mathsf{y}A + \mathsf{y}_3 E_m = \mathsf{c}$$

と表される. 更に $\mathsf{y} = \mathsf{y}_1 - \mathsf{y}_2$ $(\mathsf{y}_1, \mathsf{y}_2 \geq \mathbf{0})$ とおくと双対問題は

$$\begin{array}{lll} \textbf{Minimize} & -w = -\mathsf{y}_1\mathsf{b} + \mathsf{y}_2\mathsf{b} = (\mathsf{y}_1\ \mathsf{y}_2\ \mathsf{y}_3)\begin{pmatrix} -\mathsf{b} \\ \mathsf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \\ \textbf{Subject to} & \mathsf{y}_1 A - \mathsf{y}_2 A + \mathsf{y}_3 E_m = \mathsf{c} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathsf{y}_1\ \mathsf{y}_2\ \mathsf{y}_3)\begin{pmatrix} A \\ -A \\ E_m \end{pmatrix} = \mathsf{c} & \\ & \mathsf{y}_1, \mathsf{y}_2, \mathsf{y}_3 \geq \mathbf{0} & \end{array}$$

と表示することができる. これらの転置をとれば

$$\begin{array}{ll} \textbf{Minimize} & -w = (-({}^t\mathsf{b})\ {}^t\mathsf{b}\ \mathbf{0})\begin{pmatrix} {}^t\mathsf{y}_1 \\ {}^t\mathsf{y}_2 \\ {}^t\mathsf{y}_3 \end{pmatrix} \\ \textbf{Subject to} & ({}^tA\ \ -({}^tA)\ E_m)\begin{pmatrix} {}^t\mathsf{y}_1 \\ {}^t\mathsf{y}_2 \\ {}^t\mathsf{y}_3 \end{pmatrix} = {}^t\mathsf{c} \\ & {}^t\mathsf{y}_1, {}^t\mathsf{y}_2, {}^t\mathsf{y}_3 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

である. 制約条件を書き換えて

$$(-({}^tA)\ {}^tA\ \ -E_m)\begin{pmatrix} {}^t\mathsf{y}_1 \\ {}^t\mathsf{y}_2 \\ {}^t\mathsf{y}_3 \end{pmatrix} = -({}^t\mathsf{c})$$

と表そう. また, この問題は双対問題と同一であるから, 仮定より有限の最適解をもつ. 前半で示した通り, この問題に対する双対問題

$$\begin{array}{ll} \textbf{Maximize} & w' = -\mathsf{z}{}^t\mathsf{c} \\ \textbf{Subject to} & \mathsf{z}(-({}^tA)\ {}^tA\ \ -E_m) \leq (-({}^t\mathsf{b})\ {}^t\mathsf{b}\ \mathbf{0}) \end{array}$$

は再び実行可能であり, この問題と元の LP 問題の双対問題は同一の最適値をもつ. ところで, この問題の制約条件は

$$-\mathsf{z}{}^tA \leq -({}^t\mathsf{b}), \quad \mathsf{z}{}^tA \leq {}^t\mathsf{b}, \quad -\mathsf{z} \leq \mathbf{0}$$

であるが, これは

$$\mathsf{z}{}^tA = {}^t\mathsf{b}, \quad \mathsf{z} \geq \mathbf{0}$$

となり, $\mathsf{w} := {}^t\mathsf{z}$ とおいて転置を取れば上式は $A\mathsf{w} = \mathsf{b}$ かつ $\mathsf{w} \geq \mathbf{0}$ と書き換えられる. このとき, 目的関数は

$$\textbf{Minimize} \quad w' = \mathsf{c}\mathsf{w}$$

と書き換えられる．これは元の LP 問題と同じである．以上で元の LP 問題は最適解をもち, それは元の問題の LP 問題の双対問題と同じ最適値をもつ．

（主問題の最適値が有界でないとき）： $\mathsf{y}A \leq \mathsf{c}$ となるような y が存在すると仮定すれば

$$-\infty < \mathsf{yb}$$

である．一方, **定理 5.1** によって $\mathsf{yb} \leq -\infty$ となり矛盾である．よって, 双対問題は実行可能ではない．

（双対問題の最適値が有界でないとき）： $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ となるような $\mathsf{x} \geq \mathbf{0}$ が存在すると仮定すれば

$$\mathsf{cx} < \infty$$

である．一方, **定理 5.1** によって $\infty \leq \mathsf{cx}$ となり矛盾である．よって, 主問題は実行可能ではない． □

双対定理が正しいことの具体例をみてみよう．

例 5-1 次の LP 問題を考える．

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = -x_1 - x_2 \\
\textbf{Subject to} & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\
& -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\
& 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}$$

の最適値は有界ではない．実際,

$$x_1 = 1 + \theta, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = 2\theta, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 2, \quad \theta > 0$$

は制約条件を満たす実行可能解であり, このときの z の値は $-1 - 2\theta$ である．値 θ はいくらでも大きくできるので最適値は有界ではない．よって, この双対問題

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Maximize} & w = y_1 + 2y_3 \\
\textbf{Subject to} & y_1 \leq 1 \\
& y_1 - 2y_2 + 2y_3 \leq -1 \\
& -y_1 + y_2 - y_3 \leq 0 \\
& y_2 \leq 0 \\
& y_3 \leq 0
\end{array}$$

は **定理 5.2** より実行可能ではないが, これを実際に確認してみる．第 2 式と第 3 式より

$$y_1 + 1 \leq 2y_2 - 2y_3, \quad y_2 - y_3 \leq y_1$$

だから $y_1 + 1 \leq 2y_1$, すなわち $1 \leq y_1$ である．これは第 1 式と相反するので実行可能ではないことがわかった．

例 5-2 **例 4-1** の LP 問題をもう一度考えてみよう．

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\
\textbf{Subject to} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 10 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}$$

これについて二段階法を用いることで実行可能であること既にみた．これの双対問題は以下のように与えられる．

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Maximize} & w = 5y_1 + 10y_2 \\
\textbf{Subject to} & 2y_1 + y_2 \leq -1 \\
& -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\
& 2y_1 + y_2 \leq -3 \\
& 3y_1 - y_2 \leq 2
\end{array}$$

この問題は凸多面体を使って幾何的に解くことができる．

レポート 5-1 **例 5-2** で与えられた双対問題を幾何的に解け.

レポート 5-2 次で与えられる LP 問題の双対問題を考えることで, もとの LP 問題が実行可能でないことを示せ.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Minimize} & z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\
\textbf{Subject to} & 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10 \\
 & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$