1 あみだくじ

• 1-1：数学におけるあみだくじ

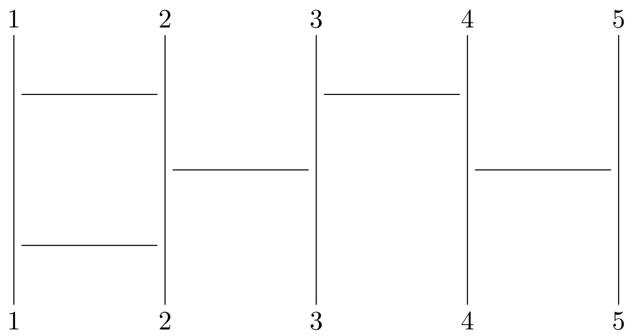
あみだくじとは, 平行な縦棒を何本か引き, 隣同士の縦棒を結ぶ横線をいくつか書き加えたものである. 本来, あみだくじを用いるときは上端に名前を書き, 下端に当たりハズレなどを書くのだが, ここでは上端と下端には $1, 2, \ldots, n$ の n 個の文字を振ることにする. あみだくじでは, 上端から下に向かって進み, 途中の横線は必ず通過して隣の縦棒に移る.

定義 1.1. $1, 2, \ldots, n$ の並びかえを **順列 (permutation)** と呼び, 順列の全体を S_n と表す. 順列 $w \in S_n$ を

$$w = [w(1)\ w(2)\ \cdots\ w(n)]$$

と書き, これを順列 w の **一列表記 (one-line notation)** という.

縦棒が n 本のあみだくじは順列 $w \in S_n$ を定める. 例えば, 以下のあみだくじは順列 $[3\ 2\ 5\ 1\ 4]$ を与える.



n 文字の順列は全部で $n!$ 通りあるわけだが, 逆に, 順列を与えたときそれを実現するあみだくじを構成することができるだろうか？

n 文字の任意の順列は, 縦棒が n 本のあみだくじで実現することができるだろうか. すなわち, $n!$ 通り全ての置換をあみだくじで実現出来るだろうか. 可能であれば, どのように構成すればよいだろうか.

補題 1.2. 縦棒が n 本のあみだくじにおいて, 上端にある任意の数 i を左端に到達させるあみだくじを構成することができる.

証明. $i = 1$ であれば, 横棒を引く必要なく左端に到達する. $i > 1$ とすると, まず i 番目の縦棒と $i-1$ 番目の縦棒の間に横線①を引く. $i = 2$ であれば, これで左端に到達する. $i > 2$ であれば, $i-1$ 番目の縦棒と $i-2$ 番目の間に横線②を, 横線 ① より下の位置にくるように引く. $i = 3$ であれば, これで到達する. $i > 3$ であれば, 以下, 帰納的に $i-1$ 本の横棒を引いていけば, 左端に到達することになる. □

これにより, 先の問の答えは「Yes」となることがわかる.

定理 1.3. n 文字の任意の置換 $[p_1\ p_2\ \cdots\ p_n]$ は, 縦棒が n 本のあみだくじで実現することができる.

証明. $p_{k_1} = 1$ であるとすると, **補題 1.2** によって k_1 を左端に到達させるように横線を $k_1 - 1$ 本引く. 次に, 2 番目から n 番目の縦棒のあみだくじに着目すれば, 上端の $1, 2, \ldots, k_1 - 1, k_1 + 1, \ldots, n$ がどこかに到達しているはずである. このとき, $p_{k_2} = 2$, 上端にあった k_2 が ℓ_1 番目の縦棒に到達していれば, ℓ_1 を 2 番目の縦棒に到達するように横線を, これまでに引いた横線よりも下の位置にくるように引く. 次に, 3 番目から n 番目の縦棒のあみだくじに着目すれば, 上端の数のうち k_1, k_2 以外がどこかに到達しているはずである. このとき,

$p_{k_3} = 3$, 上端にあった k_3 が ℓ_2 番目の縦棒に到達していれば, ℓ_2 を 3 番目の縦棒に到達するように横線を, これまでに引いた横線よりも下の位置にくるように引く．以下これを繰り返せばよい． □

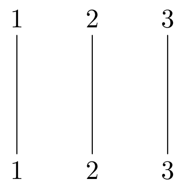
群論の一般論によって, ある順列をあみだくじで実現するために必要な横棒の本数は転倒数以上であるので, 横棒の本数がちょうど転倒数と一致するようなあみだくじを考えることにする．ここで, 順列の転倒数とは次で定義される数である．

定義 1.4. 順列 $w \in S_n$ に対して,

$$\mathsf{inv}(w) := \sharp\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n,\ w(i) > w(j)\}$$

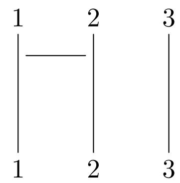
を w の **転倒数 (inversion)** と呼ぶ．ここで, 有限集合 X に対して $\sharp X$ で X の要素の数を表す．

例 1-1　5 文字の置換 [3 2 1] を実現するあみだくじを構成しよう．



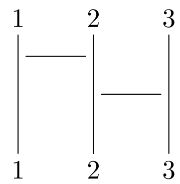
[3 2 1]

そのためには, 順列を左から右に数字を読んだときに数字が減少している箇所に着目をする．今の場合で言えば, 3 2 か 2 1 のどちらかである．もし 3 2 を選べば, 1 番目と 2 番目を入れ替えるために, 1 本目の縦棒と 2 本目の縦棒の間に横棒を引いて, 3 2 を 2 3 に入れ替える．



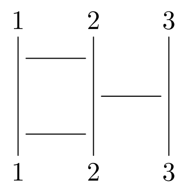
[3 2 1]
[2 3 1]

この操作を, 転倒数が 0 になるまで繰り返す．次は, 順列を左から右に数字を読んだときに数字が減少している箇所は 3 1 の部分である．2 番目と 3 番目を入れ替えるために, 2 本目の縦棒と 3 本目の縦棒の間に横棒を今ある横棒より下に引いて, 3 1 を 1 3 に入れ替える．



[3 2 1]
[2 3 1]
[2 1 3]

最後に, 順列を左から右に数字を読んだときに数字が減少している箇所は 2 1 の部分だから



[3 2 1]
[2 3 1]
[2 1 3]
[1 2 3]

このあみだくじは確かに [3 2 1] を与えている．また, はじめに 2 1 を選んで同様の作業を進めることで別のあみだくじが得られて, [3 2 1] を実現する横棒の本数が最小のあみだくじが全部で 2 個であることがわかる．

• 1-2 : Rothe 図形と Young 図形

順列 [3 2 1] を与えるあみだくじの個数は 2 であることをみたが, 順列 w を与えたときに w を実現する横棒の本数が最小のあみだくじの個数を与える公式が存在する. その準備を行う.

定義 1.5. $n \times n$ のマス目を用意する. $w \in S_n$ が定める **Rothe 図形 (Rothe diagram)** とは, 以下で定まる図形をいう.

(i) $(k, w(k))$ 成分の箱に ◯ を書き込む.
(ii) 箱の中にある ◯ の右側すべての箱と下側すべての箱に × と書き込む.

もう一つ, 組合せ論的な数学の道具を用意しよう.

自然数 $n > 0$ に対して, 自然数の広義単調減少列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell > 0$ であって,

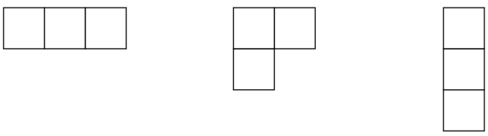
$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell$$

を満たす $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ を **n の分割 (partition of n)** といい, 記号で $\lambda \vdash n$ とかく.

例 1-2　5 の分割は (5), $(4,1)$, $(3,2)$, $(3,1,1)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1)$ の 7 個である .

定義 1.6. n を自然数, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell) \vdash n$ であるとする. n 個の正方形の箱を上詰めかつ左詰めに, 1 行目に λ_1 個, 2 行目に λ_2 個, ..., ℓ 行目に λ_ℓ 個箱を並べたものを **Young 図形 (Young diagram)** といい, 同じ λ を用いて表す. 特別に, 0 個の箱からなる Young 図形を $\varnothing$ として定める.

例 1-3　$\lambda \vdash 3$ であるような Young 図形は次の 3 つしかない.



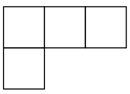
(3)　　　$(2,1)$　　　$(1,1,1)$

さて, Rothe 図形に戻ろう. 順列 $w \in S_n$ に対して, 各行に ◯ や × を書き込んで得られる Rothe 図形の何も記入されていない箱の個数を各行ごとに数えて, それを大きい順に並べたものを λ とするとき, λ を Young 図形とみなすことができる. これを順列 w が定める Young 図形といい, $\lambda(w)$ であらわす.

例 1-4　順列 $w = [4\ 1\ 3\ 2]$ が定める Rothe 図は

			◯
◯	×	×	×
×		◯	×
×	◯	×	×

であるので, 各行で何も書き込まれていない箱の数を数えれば $(3,0,1,0)$ である. よって順列 w から定まる Young 図形は $\lambda(w) = (3,1,0,0) = (3,1)$ である.

$\lambda(w) =$ 

- **1-3： hock 長公式**

Young 図形 λ に対して, x が λ の箱であることを記号で $x \in \lambda$ と表すことにする. 各 $x \in \lambda$ に対して,

$$h(x) := \sharp\{y \in \lambda \mid y \text{ は } x \text{ の右側または下側にある.}\} + 1$$

とおく. これを $x \in \lambda$ の **フック長 (hool length)** と呼ぶ.

例 1-5　$\lambda = (3,1)$ の各箱 $x \in \lambda$ に hook 長 $h(x)$ を書き込んだものは次のようになる.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$\lambda \vdash n$ であるような Young 図形 λ の各箱に 1 から n の数字を次のルールで書き込んだものを λ の **標準盤 (standard tableaux)** という.

- 1 から n まですべての数を一度ずつ用いる.
- 書き込まれる数は, 各行は左から右に, 各列は上から下へ単調増加となる.

実は, Young 図形 λ の標準盤の数はフック長を使って求めることができる.

定理 1.7 (Frame–Robinson–Thrall の hook 長公式)**.** λ の標準盤の集合を $\mathsf{ST}(\lambda)$ と書くとき,

$$f^\lambda := \frac{n!}{\prod_{x\in\lambda} h(x)}$$

は必ず自然数になり, $f^\lambda = \sharp\mathsf{ST}(\lambda)$ が成り立つ.

例 1-6　$\lambda = (3,1)$ とするとき, $\mathsf{ST}(\lambda)$ は

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

の 3 つからなる集合である.

また,

$$f^\lambda = \frac{4!}{4\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 3$$

と一致することも確かめられる.

- **1-4： 順列を実現する横棒の本数が最小のあみだくじ**

以上の準備のもと, 与えられた順列 $w \in S_n$ を実現するような横棒が最小のあみだくじの個数を求める式を与えよう.

定義 1.8. 順列 $w \in S_n$ が **2143-回避 (2143-avoiding)** とは, $1 \leq i < j < k < l \leq n$ に対し決して $w(j) < w(i) < w(l) < w(k)$ とならないときをいう.

定理 1.9. 2143-回避の順列 $w \in S_n$ を実現する横棒の本数が最小のあみだくじの個数は $f^{\lambda(w)}$ で与えられる.

2143-回避でない順列 w については, w を実現する横棒の本数が最小のあみだくじの個数と $f^{\lambda(w)}$ が一致するとは限らない.

課題 1-1　[4 1 3 2] を実現する横棒が最小のあみだくじをすべて求めよ.

課題 1-2　4 個の箱からなる Young 図形 λ をすべて書いて, その各箱にフック長を書き込め. また, 各 λ の標準盤の個数を求めよ.

課題 1-3　$w \in S_4$ のうち, 2143-回避のものはどれか. また, $w = [4\ 5\ 3\ 1\ 2]$ を実現する横棒の本数が最小のあみだくじの個数を求めよ.

課題 1-4　$w = [2\ 1\ 4\ 3]$ を実現する横棒の本数が最小のあみだくじの個数と $f^{\lambda(w)}$ が一致していないことを確認せよ.