

2 Robinson–Schensted–Knuth 対応

順列 w が 2143-回避だとは限らない一般の場合では, hook length 公式の非負係数一次結合によって w を実現するようなあみだくじの個数が求まる. この事実は Edelman–Greene の結果を柏原クリスタル^{*1}を用いて解釈し直した Morse–Schilling の結果により俯瞰的に説明される.

● 2-1 : 半標準盤

Young 図形 $\lambda \vdash n$ の標準盤とは, 各箱に 1 から n を一つずつ, 左から右へ, 上から下へ狭義の単調増加になるように書き加えたものであった. この条件を少し緩めて, 半標準盤と呼ばれるものを導入しよう.

定義 2.1. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ であるような Young 図形 λ の各箱に 1 から d の数字を次のルールで書き込んだものを λ の **半標準盤 (semi-standard tableaux)** という.

- 1 から d までの数を書き込む. 同じ数字を複数回用いても良い.
- 書き込まれる数は, 各行は左から右に, 各列は上から下へ広義単調増加である. ここで, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_k$ が広義単調増加であるとは, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ を満たすことである.

λ から定まる半標準盤すべての集合を $\text{SST}(\lambda)$ と表す.

例 2-1 $\lambda = (3, 1)$ の半標準盤は以下の 7 個で尽くされる.

1	1	1
1		

1	1	2
1		

1	2	2
1		

1	1	1
2		

1	1	2
2		

1	2	2
2		

2	2	2
2		

● 2-2 : Robinson–Schensted–Knuth 対応

与えられた半標準盤 T から, 箱をひとつ増やすような新たな半標準盤を得る操作を定義しよう.

定義 2.2. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ を Young 図形とする. 半標準盤 $T \in \text{SST}(\lambda)$ に対する $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ の **Schensted の行挿入 (Schensted row insertion)** または **バンブ (Bumping)** $T \leftarrow i$ とは, 次の規則で計算される半標準盤である.

- $a = 1, b = i$ と初期化する.
- T の第 a 行めに書き込まれている数字が左から $t_{a,1} \leq t_{a,2} \leq \dots \leq t_{a,\lambda_a}$ とする.
 - $t_{a,\lambda_a} \leq b$ ならば, T の第 a 行目を $t_{a,1} \leq t_{a,2} \leq \dots \leq t_{a,\lambda_a} \leq b$ として終了する.
 - $t_{a,\lambda_a} > b$ ならば, $t_{a,s-1} \leq b < t_{a,s}$ となるような $t_{a,s}$ をひとつとり, T の第 a 行目を

$$t_{a,1} \leq \dots \leq t_{a,s-1} \leq b \leq t_{a,s+1} \leq \dots \leq t_{a,\lambda_a}$$

と更新し, a を $a + 1$ に, b を $t_{a,s}$ と更新して (ii) に戻る.

- $\emptyset \leftarrow i = \boxed{i}$ と定める.

例 2-2 $\lambda = (4, 3, 1, 1)$ として, $T \in \text{SST}(\lambda)$ を次のように取る.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}$$

^{*1} 柏原 正樹先生は日本人で初めてアーベル賞を受賞した数学者である.

これに対して, $T \leftarrow 2$ を計算してみよう. まず, $a = 1, b = 2$ と初期化すると, 1 行目は $1 \leq 2 \leq 2 < 3$ だからこれを

$$1 \leq 2 \leq 2 \leq 2$$

と書き換えて, $a = 2, b = 3$ に更新する. 次に 2 行目は $1 \leq 3 \leq 4$ だからこれを

$$1 \leq 3 \leq 3$$

と書き換えて, $a = 3, b = 4$ に更新する. 次に 3 行目は 1 だから 3 行目を

$$1 \leq 4$$

として終了する. すなわち,

$$T \leftarrow 2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 4 & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}$$

となる.

以下, 自然数 d に対して, $[d] := \{1, 2, \dots, d\}$ とおく. また, $[d]^{\times k}$ で集合 $[d]$ の k 個の直積を表す.

定義 2.3. $w = (w_1, \dots, w_n) \in [d]^{\times n}$ に対して,

$$P(w) = \emptyset \leftarrow w_1 \leftarrow w_2 \leftarrow \dots \leftarrow w_n$$

を w の P-シンボル (P-symbol) という. これに付随して $P(w)$ が Young 図形 λ_n の半標準盤ならば, Young 図形の増加列

$$\emptyset \subset \lambda_1 \subset \dots \subset \lambda_n =: \lambda$$

が得られるので, 増加列に合わせて $1, \dots, n$ を順に書き込んで標準盤を得る. この標準盤を $Q(w)$ と表わし, w の Q-シンボル (Q-symbol) と呼ぶ.

例 2-3 $w = (1, 2, 3, 1, 2, 1, 3)$ に対して, $P(w)$ と $Q(w)$ を求めてみよう.

$$\begin{aligned} P(w) &= \emptyset \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\ &= \boxed{1} \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\ &= \boxed{1} \boxed{2} \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\ &= \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & \end{array} \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \end{array} \leftarrow 1 \leftarrow 3 \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \end{array} \leftarrow 3 \\ &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & & & \end{array} \end{aligned}$$

箱の増え方をレコードしたのが $Q(w)$ なので,

$$Q(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 7 \\ \hline 4 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$$

である.

以上の準備のもと, Robinson–Schensted–Knuth 対応 (RSK 対応) の主張を述べよう. これは, 古典的な Robinson–Schensted 対応 (RS 対応) と呼ばれる「順列」と「標準盤のペア」との間にある全単射対応をより一般のかたちにしたものである.

定理 2.4 (Robinson–Schensted–Knuth 対応). [RSK 対応 \(RSK correspondence\)](#) と呼ばれる次の対応は全単射である.

$$[d]^{\times n} \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash n, d \leq n} \text{SST}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda); \quad w \longmapsto (P(w), Q(w))$$

特に, これを順列に制限すれば, 次の対応は全単射である.

$$S_n \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \text{ST}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda); \quad w \longmapsto (P(w), Q(w))$$

この対応は [RS 対応 \(RS correspondence\)](#) という.

● 2-3 : 文字列と基本変換

$[d]$ の元をいくつか用いて一列に並べた $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ を [長さ \$n\$ の文字列 \(string of length \$n\$ \)](#) という. 文字列 w と w' に対して, その接続を ww' とかく. 長さ 0 の文字列を [空文 \(empty string\)](#) といい, ε とかく.

$T \in \text{SST}(\lambda)$ に対して, T の最下行から左から右へ, 下から上へ読み, 箱に書かれている文字を並べた文字列を $w(T)$ と書いて, これを [\$w\$ の語 \(word of \$T\$ \)](#) という. $w(T)$ を表すとき, 行に対応するワードを () でくくってもよい. このとき, () に現れる文字列は単調増加列である.

例 2-4 半標準盤 T が

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 5 & \\ \hline 3 & 4 & 4 & & \\ \hline 5 & 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

とすれば, $w_T = 55344223511234 = (55)(344)(2235)(11234)$ である.

では, パンプを行えば, 対応する文字列たちはどのように変化するだろうか. すなわち, $w(T \leftarrow x)$ と $w(T)$ の間にどのような関係があるだろうか.

文字 x を j 行目に挿入する事を考える. 対応する j 行目のワードが $ux'y$ (ただし, u, v は文字列, x' は文字であり, u に含まれるどの文字も x 以下かつ $x < x'$ である) としよう. このとき, j 行目のワードは uxv に置き換わり, x' が $j+1$ 行目に挿入されていく. 結果として,

$$(ux'v) \cdot x \longmapsto x' \cdot (uxv)$$

というワードが得られる.

例 2-5 $w(T) = (56)(446)(2355)(1224)$ とするとき, $T \leftarrow 3$ を計算すると

1	2	2	4
2	3	5	5
4	4	6	
5	6		

 $\leftarrow 3 =$

1	2	2	3
2	3	5	5
4	4	6	
5	6		

 $\leftarrow 4 =$

1	2	2	3
2	3	4	5
4	4	6	
5	6		

 $\leftarrow 5 =$

1	2	2	3
2	3	4	5
4	4	5	
5	6		

 $\leftarrow 6 =$

1	2	2	3
2	3	4	5
4	4	5	
5	6	6	

なので, ワードが変化する様子をみれば

$$\begin{aligned}
 (56)(446)(2355)(1224) \cdot 3 &\mapsto (56)(446)(2355) \cdot 4 \cdot (122\mathbf{3}) \mapsto (56)(446) \cdot 5 \cdot (23\mathbf{4}5)(1223) \\
 &\mapsto (56) \cdot 6 \cdot (44\mathbf{5})(2345)(1223) \mapsto (56\mathbf{6})(445)(2345)(1223)
 \end{aligned}$$

ワードの変化を一文字の移動をひとつずつ細かく見ていけば, 以下のルールで行われていることに気づく.

- ① $x < y \leq z$ ならば, $yz\mathbf{x} \mapsto y\mathbf{x}z \dots \dots$ 右端が一番小さいなら, それを左にひとつ移動する.
- ② $x \leq y < z$ ならば, $x\mathbf{z}y \mapsto \mathbf{z}xy \dots \dots$ 真ん中が一番大きいなら, それを左にひとつ移動する.

$$(23\mathbf{55})4 \xrightarrow{\textcircled{1}} (235\mathbf{4}5) = (2\mathbf{35}45) \xrightarrow{\textcircled{2}} (2\mathbf{53}45) = (\mathbf{253}45) \xrightarrow{\textcircled{2}} 5(\mathbf{23}45) \dashrightarrow (44\mathbf{6})5 \xrightarrow{\textcircled{2}} (4\mathbf{6}45) \xrightarrow{\textcircled{2}} 6(\mathbf{44}5) \dashrightarrow \dots$$

定義 2.5. 文字列 w 中にある連続する 3 つの文字に対する変換①, ②およびそれらの逆の操作を **Knuth 変換 (Knuth transformation)** と呼ぶ. 2 つの文字列 w, w' が, 連続する Knuth 変換で移り合うとき, w と w' は **Knuth 同値 (Knuth equivalence)** と呼ぶ. Knuth 同値が定める最小の同値関係を $\sim_K$ で表し, $w \sim_K w'$ であるときに w と w' は同じ Knuth 同値類に属するという.

Greene-Fomin 理論によって, 次の Knuth の定理を示すことができる.

定理 2.6 (Knuth の定理). $x \sim_K y$ であるための必要十分条件は, $P(x) = P(y)$ となることである.

課題 2-1 $\lambda = (3, 2, 1)$ の半標準盤を全て求めよ.

課題 2-2 (1) $w = (5, 5, 3, 4, 2, 3, 5, 1, 1, 2, 3, 4)$ に対して, $P(w)$ と $Q(w)$ を求めよ.

(2) $\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \right) = (P(w), Q(w))$ となるような $w \in S_4$ を求めよ.

課題 2-3 $w \in S_n$ に対して, $P(w) \in \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \text{SST}(\lambda)$ を対応させる写像は単射ではない. 単射ではない例を挙げよ.

課題 2-4 $w = 5152431245$ と $w' = 5415213245$ が同じ Knuth 同値類に属することを示せ.