

3 柏原クリスタル

柏原クリスタルを導入した本来の由来は、代数群^{*1}の表現を「微分する」ことから始まる。古典的には、Lie 群^{*2}の単位元における接平面として Lie 環^{*3}が得られるわけであるが、その表現を考えると、その Lie 環に付随する包絡環と呼ばれる多元環^{*4}の表現を考えると同値であることが知られており、さらに包絡環の量子化である「量子群」を考えることでより一般の状況から俯瞰してその構造を調べるといった流れを辿ってきた。そして、簡約な代数群は「ルートデータ」と呼ばれるもので分類されることが知られており、現在ではこれらの結果が柏原クリスタルと呼ばれる組合せ論的な対象で理解される。

● 3-1 : ルートデータ

V を Euclid 空間、すなわち、正定値で対称的な内積 $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ をもつ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。零ベクトルではないような $x \in V$ に対して、 $s_x : V \rightarrow V$ を x に直交する V の超平面 $H_x := \{y \in V \mid \langle x, y \rangle = 0\}$ での鏡映とする。具体的には以下の式で定義される線形写像である。

$$s_x(y) = y - \langle y, x^\vee \rangle x, \quad x^\vee := \frac{2}{\langle x, x \rangle} x$$

定義 3.1. $\Phi \subset V$ は零ベクトルを含まない有限集合とする。 Φ が **ルート系 (root system)** であるとは、次の条件を満たすときをいう。

- (R1) 任意の $x \in \Phi$ に対して、 $\Phi \cap \mathbb{R}u = \{x, -x\}$ である。
- (R2) 任意の $x \in \Phi$ に対して、 $s_x(\Phi) = \Phi$ である。
- (R3) 任意の $x, y \in \Phi$ に対して、 $\langle x, y^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ である。

Φ の元を **ルート (root)**、 $\Phi^\vee := \{x^\vee \mid x \in \Phi\}$ の元を **余ルート (coroot)** という。また、ルート系 Φ の **重み格子 (weight lattice)** Λ とは、

$$\Lambda := \{x \in V \mid \text{任意の } y \in \Phi \text{ に対して、} \langle x, y^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}$$

で定まる V を張る格子である。

定義 3.2. Φ をルート系とする。 $\Pi \subset \Phi$ が Φ の **底 (base)** であるとは、次の条件を満たすときをいう。

- (B1) Π は $\mathbb{R}$ 上での $\text{Span}_{\mathbb{R}}(\Phi) := \{x \in V \mid x \text{ は } \Phi \text{ の元による } \mathbb{R} \text{ 上一次結合}\}$ の基底である。
- (B2) $x \in \Phi$ を Π の元の一次結合で表したとき、係数の符号はすべて同じである。

このとき、 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ の元 α_i を **単純ルート (simple root)** と呼ぶ。

以後、 $\mathbf{e}_i$ により第 i 成分が 1 で他の成分が 0 であるようなベクトルを表す。

例 3-1 (A_n 型ルート系 / $\text{GL}(n+1)$ version) $V := \mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ をとる。このとき、ルート系 $\Phi := \{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \mid 1 \leq i, j \leq n+1 \text{ (} i \neq j \text{)}\} \subset V$ を A_n 型ルート系と呼ぶ。また、 Φ の底は $\Pi := \{\alpha_i := \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ で与えられる。重み格子 $P(\Phi)$ は $\mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_{n+1}$ である。

*1 代数多様体であって、群の構造をもっており、群としての積と逆元を取る演算がその多様体上の正則写像によって与えられるもの。

*2 可微分多様体であって、かつ群であるようなもの。

*3 数理論理学由来の良い性質を満たすブラケット積をもつベクトル空間。

*4 環かつベクトル空間であって、積とスカラー倍の間に整合性をもつもの。

例 3-2 (A_n 型ルート系 / $SL(n+1)$ version) 全ての成分が 1 のベクトル $\mathbf{v}_1 := (1 \ 1 \ \cdots \ 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ によって張られる $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間を $\mathbb{R}\mathbf{v}_1$ とかく. Euclid 空間 V を, 商ベクトル空間

$$V := \mathbb{R}^{n+1} / \mathbb{R}\mathbf{v}_1$$

と定めるとき, ルート系 $\Phi := \{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \pmod{\mathbb{R}\mathbf{v}_1} \mid 1 \leq i, j \leq n \ (i \neq j)\} \subset V$ も A_n 型ルート系と呼ぶ. このとき, Φ の底は $\Pi := \{\alpha_i \pmod{\mathbb{R}\mathbf{v}_1} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ で与えられる. 重み格子 $P(\Phi)$ は $\mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z}\mathbf{v}_1$ である.

● 3-2 : 柏原クリスタル

この節では, 与えられたルートデータに対する柏原クリスタル (グラフ) の定義を与える.

定義 3.3. Φ をルート系とし, Λ をその重み格子とする. Φ の単純ルートからなる集合を $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ とおく. 有向グラフ $\mathcal{C} = (V, E)$ と頂点の重み $\text{wt} : V \rightarrow \Lambda$ および矢印の彩色 $\mathbf{c} : E \rightarrow \Pi$ および写像

$$\varepsilon_i, \varphi_i : V \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\} \quad (i \in I)$$

の 5 つ組 $(\mathcal{C}, \text{wt}, \mathbf{c}, \{\varepsilon_i\}_{i \in I}, \{\varphi_i\}_{i \in I})$ が [半正規柏原クリスタル \(semiregular Kashiwara crystal\)](#) であるとは, 次の条件を満たすときをいう.

(KC1) 任意の $i \in I$ と任意の $x \in V$ に対して, x から出入りする α_i 色の矢印は高々 1 本である*5.

$$\#\{y \in V \mid y \xrightarrow{\alpha_i} x \in E\} \leq 1, \quad \#\{y \in V \mid x \xrightarrow{\alpha_i} y \in E\} \leq 1$$

(KC2) $x \xrightarrow{\alpha_i} y \in E$ ならば, 次が成り立つ.

$$(a) \text{ wt}(y) = \text{wt}(x) - \alpha_i$$

$$(b) \varepsilon_i(y) = \varepsilon_i(x) + 1$$

$$(c) \varphi_i(y) = \varphi_i(x) - 1$$

(KC3) 任意の $x \in V$ に対して $\varphi_i(x) = \varepsilon_i(x) + \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x) \rangle$ である.

(KC4) もし, $\varphi_i(x) = -\infty$ ならば, $x \xrightarrow{\alpha_i} y$ や $y \xrightarrow{\alpha_i} x$ となるような $y \in V$ は存在しない.

正確には半正規柏原クリスタルは 5 つ組のことであるが, 煩雑さを避けるため, 以後「 $\mathcal{C}$ はクリスタルである」と省略して書き, x が $\mathcal{C}$ の頂点であることを $x \in \mathcal{C}$ で表す.

例 3-3 例 3-1 で扱った A_{n-1} 型ルート系から定まる以下のグラフは, $GL(n)$ の標準クリスタルと呼ばれる.

$$\boxed{1} \xrightarrow{\alpha_1} \boxed{2} \xrightarrow{\alpha_2} \boxed{3} \xrightarrow{\alpha_3} \boxed{4} \xrightarrow{\alpha_4} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \boxed{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \boxed{n}$$

ここで, 頂点の重み $\text{wt} : V \rightarrow \Lambda$ と矢印の採色 $\mathbf{c} : E \rightarrow \Pi$ は

$$\text{wt} \left(\boxed{i} \right) = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{c} \left(\boxed{i} \rightarrow \boxed{i+1} \right) = \alpha_i = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}$$

と定め, ε_i, φ_i ($i \in I$) は, 極大 i -系列 $x_+ \xrightarrow{\alpha_i} \cdots \xrightarrow{\alpha_i} x \xrightarrow{\alpha_i} \cdots \xrightarrow{\alpha_i} x_-$ に対して

$$x_+ \xrightarrow{\alpha_i} \cdots \xrightarrow{\alpha_i} x \xrightarrow{\alpha_i} \cdots \xrightarrow{\alpha_i} x_-$$

$\varepsilon_i(x) \qquad \qquad \qquad \varphi_i(x)$

と定める. $GL(n)$ の標準クリスタルを $\mathbb{B}$ で表す.

*5 もし, $x \xrightarrow{\alpha_i} y \in E$ であれば, (KC1) によって $\{z \in V \mid z \xrightarrow{\alpha_i} y \in E\} = \{x\}$, $\{y \in V \mid x \xrightarrow{\alpha_i} y \in E\} = \{y\}$ である. そこで,

$$y = f_i x, \quad x = e_i y$$

と書き表す. このようにして定まる e_i, f_i ($i \in I$) を [柏原作用素 \(Kashiwara operators\)](#) という.

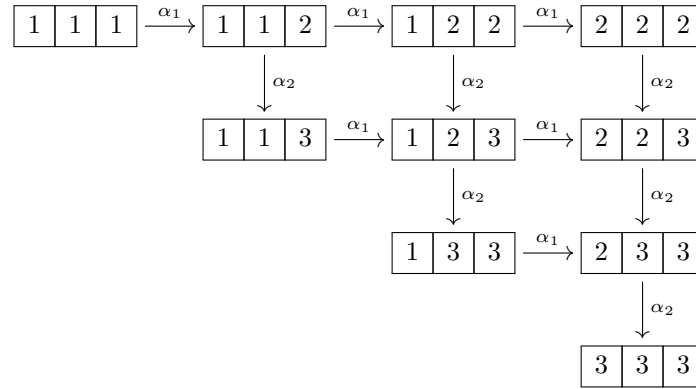
例 3-4 例 3-1 で扱った A_{n-1} 型ルート系で与えられる $GL(n)$ に付随した別の柏原クリスタルの例を挙げる。自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\mathcal{B}_{(k)}^{[n]} := \left\{ R = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \mid j_1 \leq \cdots \leq j_k, j_1, \dots, j_k \in [n] \right\}$$

とおく。 $\mathcal{B}_{(k)}^{[n]}$ を頂点として、以下のようにして重み付き彩色グラフを定義しよう。 $R \in \mathcal{B}_{(k)}^{[n]}$ に対して

- $\text{wt}(R) = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$, μ_i は R に記入されている i の数
- $\varepsilon_i(R)$ は R に記入されている $i+1$ の数
- $\varphi_i(R)$ は R に記入されている i の数
- $\varphi_i(R) > 0$ であるときに $R \xrightarrow{\alpha_i} R'$ を引く。ここで、 R' は R の中で一番右にある i を $i+1$ に変えたもの

このようにして定義されるクリスタルも $\mathcal{B}_{(k)}^{[n]}$ と表すことにする。例えば、次のグラフは $n = k = 3$ のときのクリスタル $\mathcal{B}_{(3)}^{[3]}$ である（ $n = 3$ なので、 $I = \{1, 2\}$ に注意）。



• 3-3 : 柏原クリスタルのテンソル積

同じルートデータに由来する 2 つの柏原クリスタル $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ に対して、 $x \in \mathcal{B}$ と $y \in \mathcal{C}$ の組 (x, y) を $x \otimes y$ と書く。

定義 3.4. 同じルートデータに由来する 2 つの柏原クリスタル $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ の **テンソル積 (tensor product)** $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ は以下で定義される柏原クリスタルである。

- 頂点集合は $\{x \otimes y \mid x \in \mathcal{B}, y \in \mathcal{C}\}$
- 矢印集合は $\{x \otimes y \xrightarrow{\alpha_i} x' \otimes y \mid x \xrightarrow{\alpha_i} x', \varphi_i(x) > \varepsilon_i(y)\} \sqcup \{x \otimes y \xrightarrow{\alpha_i} x \otimes y' \mid y \xrightarrow{\alpha_i} y', \varphi_i(x) \leq \varepsilon_i(y)\}$
- $\text{wt}(x \otimes y) = \text{wt}(x) + \text{wt}(y)$
- $\varepsilon_i(x \otimes y) = \max\{\varepsilon_i(x), \varepsilon_i(y) - \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x) \rangle\}$
- $\varphi_i(x \otimes y) = \max\{\varphi_i(x) + \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(y) \rangle, \varphi_i(y)\}$

自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、帰納的に $\mathcal{B}^{\otimes n} := \mathcal{B} \otimes \underbrace{\mathcal{B} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}}_{n-1}$ とおく。

定義 3.5. $\lambda \vdash n$ で、 $T \in \text{SST}(\lambda)$ とする。 T を、1 行目から初めて右から左に読み、その次に 2 行目を右から左に読み、と繰り返すことで得られる語を、 T の **アラビア読み (Arabic reading)** という。

命題 3.6. $\lambda \vdash n$ で、 $T \in \text{SST}(\lambda)$ とする。 $T \in \text{SST}(\lambda)$ をアラビア読みして得られる語を $\mathcal{B}^{\otimes n}$ の元とみなす。このとき、 $\mathbb{B}^{\otimes n}$ の部分クリスタルとして、柏原クリスタルの構造が入る。これを $\mathbb{B}(\lambda)$ で表し、最高重み λ の **最高重みクリスタル (highest weight crystal)** と呼ぶ。

例 3-5 半標準盤

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & & \\ \hline 2 & 3 & & & \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array}$$

のアラビア読みは $3 \otimes 2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 3 \otimes 2 \otimes 1 \otimes 3 \otimes 2 \otimes 3$ である.

定理 3.7. $w_n \otimes \cdots \otimes w_1 \in \mathbb{B}^{\otimes n}$ に対して, $w = (w_1, \dots, w_n) \in [d]^{\times n}$ とおく. このとき,

$$w_n \otimes \cdots \otimes w_1 \mapsto (P(w), Q(w))$$

は有向グラフの同型であって, 付加構造 $\text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i$ を保つ. すなわち, 上の対応を

$$\Phi_{\text{RSK}} : \mathbb{B}^{\otimes n} \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \mathbb{B}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda)$$

とおけば,

$$\text{wt} \circ \Phi_{\text{RSK}} = \text{wt}, \quad \varepsilon_i \circ \Phi_{\text{RSK}} = \varepsilon_i, \quad \varphi_i \circ \Phi_{\text{RSK}} = \varphi_i$$

が成り立つ.

課題 3-1 A 型ルート系 Φ がルート系の公理を満たすことを示せ. また, Π が Φ の底であることを示せ.

課題 3-2 $\text{GL}(4)$ のクリスタル $\mathcal{B}_{(4)}^{[4]}$ を計算せよ.

課題 3-3 例 3-3 の $\text{GL}(3)$ の標準クリスタル $\mathbb{B}$ に対して, $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ および $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ を計算せよ.