0　数学の記号など

• 0-1：集合の記号

まず, 本講義に限らず, サイエンスの世界で用いられる記号や約束を紹介しよう.

条件がはっきりとしているようなものの集まりを**集合**といい, このとき集められている 1 つ 1 つのものを**元**または**要素**という.「条件がはっきりしている」というのは, 集合の元であるという条件がきっちりと明示されているということである. 例えば,「ネコ科の動物の集合」は問題なく集合であるが,「狐が大好きな人の集合」と言ったときには「大好き」の基準が人によって異なるため, 数学で扱う意味での集合ではない.

集合を表す記号を表にまとめておこう. 以下の表では A と B は集合とする.

記号	日本語	意味
$a \in A$	a は集合 A に属する	a は集合 A の元である.
$a \notin A$	a は集合 A に属さない	a は集合 A の元ではない.
$A \subset B$	A は B の部分集合	A の元はすべて B にも属している.
$A \not\subset B$	A は B の部分集合ではない	$A \subset B$ ではない.
$A \subseteq B$	A は B の部分集合, または $A = B$	$A \subset B$ もしくは $A = B$ のいずれかである.
$A \subsetneq B$	A は B の真の部分集合	$A \subset B$ かつ $A \neq B$ である.
$\varnothing$	空集合	元がひとつもない集合
$A \cap B$	A と B の共通部分	A と B の両方に属するもの全体の集合
$A \cup B$	A と B 和集合	A と B の少なくとも一方には属するもの全体の集合
$\overline{A}$	A の補集合	全体集合 U のうち, A に属さないもの全体の集合

数学では, 特別な集合に対してはそれを表す記号が用意されており, 本講義でも用いるので紹介しておく.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$ = 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$ = 整数全体の集合
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$ = 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$ = 実数全体の集合
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i$ は虚数単位 $\}$ 複素数全体の集合

これらの記号を実際に板書するときは, 原則としてアルファベットの左側を二重線などで書き表すことが多い.

• 0-2：実数 $\mathbb{R}$ の区間

高校では「b が a 以上」というのを不等号を用いて「$a \leqq b$」と表していた. 大学以降では,「$a \leqq b$」の $=$ の部分の線を 1 本省略して「$a \leq b$」などと書く.

2 つの実数 $a < b$ に対して, a, b に対する**閉区間** $[a, b]$, **開区間** (a, b), **半開区間** $(a, b]$, $[a, b)$ はそれぞれ以下のように定義される集合である.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

また,

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

として表し, これらを総称して実数 $\mathbb{R}$ の**区間**よ呼ぶ.

- **0-3： 全称記号 $\forall$ と存在記号 $\exists$**

いろいろな命題を簡略化して述べるために, 次のような記号を導入すると大変便利である.

- 「集合 A の**任意の**元 $a \in A$ は条件 $P(a)$ を満たす」ことを「$\forall\ a \in A,\ P(a)$」と書く. 記号 $\forall$ は「すべての」という意味の記号である.
- 「集合 A の元 $a \in A$ で, 条件 $P(a)$ を**満たすものがある**」ことを, 「$\exists\ a \in A$ (s.t.) $P(a)$」と書く. ここで, (s.t.) は such that の省略形である. 記号 $\exists$ は「ある」「存在する」の意味の記号である.

例 0-1　(1) 任意の自然数 n に対して, n^2 も自然数である. これを上記の記号を用いて書くと, 以下の通り.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \in \mathbb{N}$$

(2) 任意の自然数 n に対して, $n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在する. これを上記の記号を用いて書くと, 以下の通り.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N} \quad \text{(s.t.)} \quad p\ \text{は素数で}\ n < p \leq 2n$$

- **0-4： 命題の必要条件, 十分条件**

2 つの条件 P, Q に対して, 命題「P ならば Q」が真であるとき, このような命題を「$P \Longrightarrow Q$」で表す. このとき, P は Q であるための**十分条件**といい, Q は P であるための**必要条件**であるという. 必要条件かつ十分条件であるような条件を**必要十分条件**と呼ぶ. 命題「$P \Longrightarrow Q$」かつ命題「$Q \Longrightarrow P$」であるとき, これを「$P \Longleftrightarrow Q$」で表す. このとき, P と Q は**同値**であるという.

- **0-5： 数学の議論に用いられる用語**

高校数学で「$y = \sin x$ を**定義**に従って微分せよ」と出題されることや, あるいは問題を解くときに「三平方の**定理**より...」などと述べる機会があったように思う. 数学の問題を議論をする上では, これらの言葉の意味をしっかりと理解しておかなければならない. 以下に, よく出てくる言葉とその意味をまとめた.

言葉	意味
定義	概念や記号の意味を明確に規定するために用いられる文章や式のことをいう.
公理	証明なしに認められている事柄のこと.
定理	数学的に論理的な証明によって正しいと認められている結果, 事実のこと.
補題	証明したい命題や定理を示すために補助的に用いられる証明済の主張のこと.
系	証明済みの結果, あるいは証明の過程で得られた事実や, 即座に得られる主張のこと.

- **0-6： ギリシャ文字**

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
A	α	アルファ	I	ι	イオタ	P	ρ, ϱ	ロー
B	β	ベータ	K	$\kappa, \varkappa$	カッパ	Σ	σ	シグマ
Γ	γ	ガンマ	Λ	λ	ラムダ	T	τ	タウ
Δ	δ	デルタ	M	μ	ミュー	Υ	υ	ウプシロン
E	ϵ, ε	イプシロン	N	ν	ヌー	Φ	φ, ϕ	ファイ
Z	ζ	ゼータ	Ξ	ξ	グザイ, クシー	X	χ	カイ
H	η	イータ	O	o	オミクロン	Ψ	ψ	プサイ
Θ	θ, ϑ	シータ	Π	π, ϖ	パイ	Ω	ω	オメガ

1　微分の定義

- **1-1 ： 平均変化率と微分係数**

　実数全体 $\mathbb{R}$ の部分集合 A を定義域とする関数 $f(x)$ を

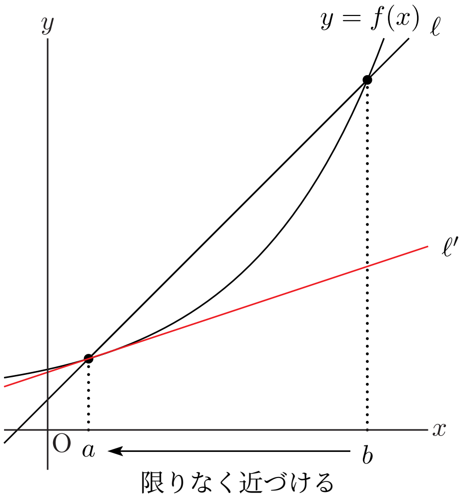
$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

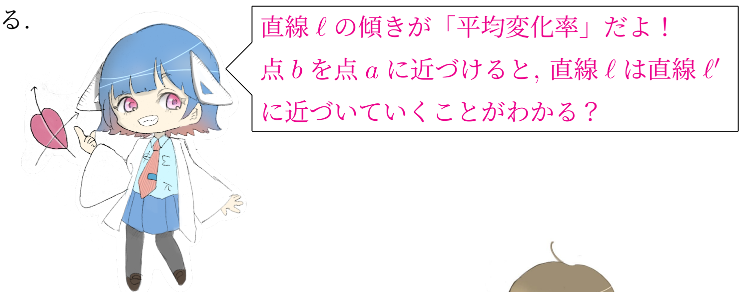
と書き，これを **A 上の関数**という．

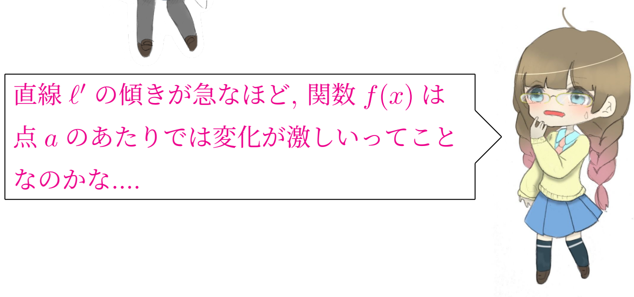
　$\mathbb{R}$ の区間 I 上の関数 $f(x)$ と区間内の点 $a, b \in I$（ただし，$a \neq b$）に対して，x が a から b まで変化するとき，$f(x)$ は $f(a)$ から $f(b)$ まで変わるが，これらの変化の量の比

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を**平均変化率**という．平均変化率は関数の変化の様子を知る１つの目安である．関数 $f(x)$ がどのように変化しているかを知るには，定義域内の各点 $a \in I$ での「瞬間の変化」を考えれば良い．そのためには，平均変化率の式 ① の a と b を限りなく近づけるということを考えればよい．関数 $f(x)$ を x で微分するというのは，区間 I の各点で瞬間の変化率を考えることに対応する．







【定義：関数 $f(x)$ の微分 ／ 導関数】

区間 I 上の関数 $f(x)$ の点 $a \in I$ に対して，極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right)$$

が収束するとき，$f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**であるという．そのときの極限値を a における $f(x)$ の**微分係数**といい，その値を $f'(a)$ または $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ と書き表す．

$f(x)$ が区間 I の**任意の** $a \in I$ に対して，$x = a$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は**区間 I で微分可能**であるといい，関数 $f'(x)$ または $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ を $f(x)$ の**導関数**という．

例 1-1　関数 $f(x) = 3x^2 + 1$ の $x = 2$ における微分係数 $f'(2)$ を求めよう．微分係数の定義より，

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 \cdot (2+h)^2 + 1 - (3 \cdot 2^2 + 1)}{h} = \lim_{h \to 0}(12 + 3h) = 12.$$

例 1-2　関数 $f(x) = 3x^2 + 1$ の導関数 $f'(x)$ を求めよう．導関数の定義より，

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\cdot(x+h)^2 + 1 - (3\cdot h^2 + 1)}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h) = 6x.$$

【右側極限と左側極限】

高校で学んだ関数の極限の定義を振り返っておく．$A \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を考える．$a \in A$ としよう．このとき，$\boldsymbol{x \neq a}$ **を満たしながら** x を a に十分近づければ，$f(x)$ がある値 c に限りなく近づけるとき $\lim_{x\to a} f(x) = c$ と表した．このときの c を極限といったのである．このとき，「$x \neq a$ を満たしながら」の部分を

- 「$\boldsymbol{x > a}$ **を満たしながら**」という条件に書き換えた場合は，「$\lim_{x\to a}$」の部分を「$\lim_{x\to a+0}$」と表し，値 c を**右極限**という．
- 「$\boldsymbol{x < a}$ **を満たしながら**」という条件に書き換えた場合は，「$\lim_{x\to a}$」の部分を「$\lim_{x\to a-0}$」と表し，値 c を**左極限**という．

特に，関数 $f(x)$ が $x = a$ で c に収束するとは，

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = c$$

が成り立つときに限る．つまり，**右極限と左極限が存在して，それらの値が一致するときに「極限」をもつ．**

• 1-2： 接線の方程式

(**1-1**) 節で出てきた直線 ℓ' は関数 $f(x)$ と点 $x = a$ でほぼ接している．つまり，点 $(a, f(a))$ を通る様々な直線のなかで，点 $(a, f(a))$ のまわりで曲線 $y = f(x)$ に最も近い直線である．直線 ℓ' は，点 $(a, f(a))$ を通り，傾きが $f'(a)$ の直線であるから，次のように表すことができる．

$$\ell' :\quad y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

【定義：接線】

区間 I 上の関数 $f(x)$ の点 $a \in I$ に対して，$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるとする．このとき直線

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

を曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における**接線**という．

【復習：点 (a, b) を通り，傾きが m の直線の方程式】

点 (a, b) を通り，傾きが m の直線の方程式は $y - b = m(x - a)$ である．

証明. 点 (a, b) を通り，傾きが m の直線 ℓ 上の (a, b) とは異なる任意の点 (x, y) をとれば，ℓ の傾きは m なので

$$m = \frac{y - b}{x - a} \quad\Longleftrightarrow\quad y - b = m(x - a)$$

となり，求める式を得る．□

例 1-3　関数 $f(x) = 3x^2 + 1$ の $x = 2$ における接線は

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 13 + 12(x - 2) = 12x - 11.$$

- **1-3： 微分の線形性**

関数を微分するという操作は「線形性」という性質をもつ. 「線形」とは, 比例するという意味をもつ言葉である.

関数を微分することに関しては次の性質が満たされることが証明できる. これを「微分の線形性」と呼ぶ.

定理 1.1 (微分の線形性). 区間 I 上で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ は区間 I で微分可能とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.　　（複号同順）
(2) $\forall c \in \mathbb{R}, \quad (cf(x))' = cf'(x)$.

証明. (1) 導関数の定義から

$$\begin{aligned}(f(x) \pm g(x))' &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \pm (g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= f'(x) \pm g'(x)\end{aligned}$$

である.

(2) c を任意の実数とする. 導関数の定義から

$$\begin{aligned}(cf(x))' &= \lim_{h \to 0} \frac{(cf(x+h)) - c(f(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= c \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= c \cdot f'(x)\end{aligned}$$

である. □

【微分の線形性に関して】

微分の線形性 (1), (2) をまとめて

$$(\alpha f(x) \pm \beta g(x))' = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

などと書くことができる. (1) と (2) の式を一発で表しているだけで, 具体的な主張は全く同じものである.

また, 数学的帰納法を用いることで I 上で微分可能な関数 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ と任意の実数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対して

$$(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x))' = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_n f_n'(x)$$

が成り立つ.

- **1-4：多項式の微分**

関数 $f(x) = x^4$ の導関数を定義通りに計算すれば

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\{(x+h)+x\}\{(x+h)-x\}\{(x+h)^2+x^2\}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2x+h)\{(x+h)^2 + x^2\} \\
&= 2x \cdot 2x^2 \\
&= 4x^3
\end{aligned}
$$

となる．しかし，このように導関数を毎回定義通りに求めていては大変である．上の計算結果を見れば，$n \in \mathbb{N}$ に対して，関数 $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ になるのではないかと想像がつく．そしてこれは数学的に正しいことがわかる．

定理 1.2 (x^n **の導関数**)**.** 関数 $f(x) = x^n$ の導関数は

$$
f'(x) = nx^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}
$$

である．

証明. 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，関数 $f(x) = x^n$ とおく．導関数の定義より

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x h^{n-1} + h^n) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} ({}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} h + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x h^{n-2} + h^{n-1}) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

となり，等式が証明された．ここで，2 つめの等号には二項定理を用いたことに注意しておく． □

この公式 ②と微分の線形性（定理 1.1）を使うことで任意の多項式の微分は機械的に計算することができるようになった．

例 1-4　関数 $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ の導関数は，

$$
f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + \frac{1}{2} = 12x^2 - 10x + \frac{1}{2}.
$$

【組合せの記号 ${}_n\mathrm{C}_r$】

高校では，異なる n 個のものから互いに異なる r 個のものを選ぶ選び方の総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ などと表した．しかし，この ${}_n\mathrm{C}_r$ という記号は標準的ではない．そこで，大学では ${}_n\mathrm{C}_r$ の代わりに $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ と表すことの方が多い．こちらの記号の方が標準的であるので，今後このような記号が出てきても混乱しないようにしよう．

【x^r の導関数】

定理 1.1 では，自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して x^n の導関数が nx^{n-1} であることを示した．実は，この n は自然数である必要はなく，任意の実数 r に対して

$$
(x^r)' = rx^{r-1}
$$

という式が成り立つ．これの証明は「対数微分法」を用いるのが最も簡単だが，それは後の講義で触れることとする．

- **1-5: 関数の連続と微分可能性**

関数 $f(x)$ が連続というのは, 直感的には「グラフがつながっている」ということである. これを式で書くと, 次のようになる.

【定義：関数の連続】
$A \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ が**点 $a \in A$ で連続**とは,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$$

が成り立つときをいう. A の任意の元 $a \in A$ に対して, 関数 $f(x)$ が点 a で連続であるとき $f(x)$ は**A 上で連続**であるという.

定理 1.3. 区間 I 上の関数 $f(x)$ に対して, **$f(x)$ が $a \in I$ で微分可能ならば $f(x)$ は点 $a \in I$ で連続である.**

証明. 区間 I 上の関数 $f(x)$ は点 a で微分可能なので,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

である. ゆえに,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right\} = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$$

が成り立つ. 従って関数 $f(x)$ は点 $a \in I$ で連続であることが証明された. □

では, 定理 1.3 の逆, つまり「関数 $f(x)$ が点 a で連続ならば点 a で $f(x)$ は微分可能」だろうか. この命題は「偽」である. そこで反例を挙げよう.

例 1-5　関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で連続である. しかし,

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1, \quad \lim_{x \to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1$$

となり両者の片側極限は一致しない. これは $f(x) = |x|$ が $x = 0$ で微分可能でないことを表す.

【具体例を考える意味】

定理 1.3 の逆の命題が成り立たないような例として $f(x) = |x|$ を考えた. このように, 真の命題は（証明を与えることは当然大切であるが）その命題がきちんと成り立っているということを具体例を使って体感すること, また偽の命題ならば反例を考えることは重要である. その定理や主張が「何がいいたいのか？」は字面だけ追っても見えてこない. 数学をきちんと理解することというのは, その主張が述べている内容を具体例を通してしっかりと考察することで自分の中に昇華するということである.

みなさんが 3 年, あるいは 4 年生になり研究室に配属されたとき, 様々な論文を読むことになると思う. その際, 論文の中身をしっかりと理解するということは, 論理を追うだけでなく「体感」することである. 字面だけ読んで発表し, 内容をきちんと理解していないがために指導教官から怒られることがないように今のうちに考え方, 向き合い方を身に着けてほしい.