10　積分の定義と微分積分の基本定理

関数の微分の操作に対する逆の操作がいわゆる積分と呼ばれる操作である．積分は平面内の図形の面積と深い関わりがあるので，まずは滑らかな関数 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$, $x = b$ の囲む部分の面積を求める方法について述べよう．

• 10-1 ： 区分求積法

定数 $a, b \in \mathbb{R}$ が $a < b$ を満たしているとする．閉区間 $[a, b]$ で定義された関数 $y = f(x)$ がその定義域内で $f(x) \geq 0$ であるとする．このとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形 A の面積[*1]を S とする．目標は S を求めることである．これを次の方針で取り組んでいくことにしよう．

(I) 閉区間 $[a, b]$ を n 個に分割する分割を任意にとって，その分点を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x_n = b$$

とする．

(II) $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，それぞれの閉区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の中から任意に 1 点 c_k をとる．

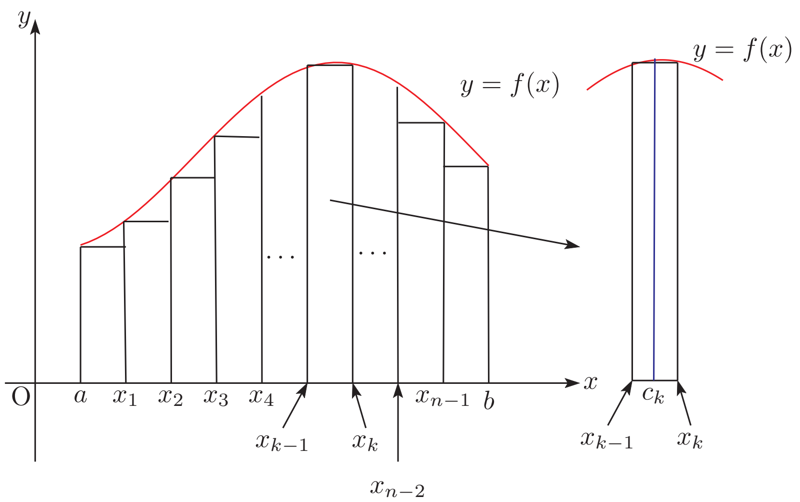
(III) $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，横幅が $x_k - x_{k-1}$，高さが $f(c_k)$ の長方形を考える．この長方形の面積 S_k は

$$S_k = (x_k - x_{k-1}) f(c_k)$$

である．これら長方形の面積 S_k の総和を考えて，これを S' とおく．

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$$

(IV) 分割数 n を大きくして，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S'_n$ を求める．



> 図形 A をたくさんの長方形で近似するイメージだよ!
> 分割が細かければ細かいほど近似精度があがるね!
> 長方形の面積を全部足すとだいたい A の面積と同じになのわかる?

このような手続きを行うと，$n \to \infty$ のとき

$$S'_n \longrightarrow S \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となることが直感的にわかる．こうして図形 A の面積 S を求める方法を**区分求積法**という．

[*1] 面積の厳密な定義はここでは省略する．

- **10-2 : 定積分**

閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $y = f(x)$ が, 定義域内で負の値を取ったとしても同様の量を定義しよう.

【定義：定積分】

閉区間 $[a, b]$ 上の関数 $y = f(x)$ に対して, 閉区間 $[a, b]$ を n 個に分割する分割を任意にとって, その分点を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x_n = b$$

とする. また, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して, それぞれの閉区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の中から任意に 1 点 c_k をとる. このとき, 極限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

が分割の仕方や, c_k の値の取り方によらずにある一定の値に収束するとき, $y = f(x)$ は $[a, b]$ で**Riemann 積分可能**といい, 極限値を

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

と表し, この値を**a から b までの $f(x)$ の定積分**と呼ぶ. 左辺はインテグラル a から b の $f(x)dx$ と読む.

また, $a > b$ の場合は $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ とし, $a = b$ のときは $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ と約束する.

【定積分の定義と計算に関する注意】

(1) **閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は Riemann 積分可能である.**

(2) Riemann 積分可能な関数 $y = f(x)$ の定積分を計算するとき, **分割の仕方と点は自由に選んで良い.** よって, 通常は分割として n 等分, $c_k = x_{k-1}$ または $c_k = x_k$ とする場合が多い.

例 10-1　定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ を求めてみよう. 閉区間 $[0, 1]$ を n 等分して, c_k を各長方形の右端点としてとる. つまり, 分割は

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$$

をとり, $c_k = \dfrac{k}{n}$ とする. このとき,

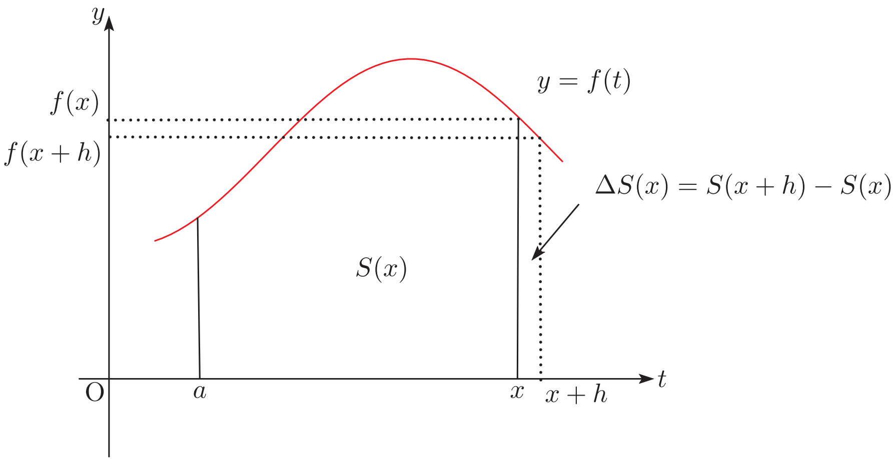
$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

である.

- **10-3 : 原始関数**

定積分を求めるには, 極限やシグマの計算をしなければいけないのだろうか. そうだとすれば, 複雑な関数の積分はどのようにして求めるのだろうか. 例えば, $y = \sin x$ であったとしても, これを区分求積法で求めるのは困難である. そこで, 図形 A の面積を求める方法について, すこし立ち戻って考えてみよう.

Riemann 積分可能な $y = f(t)$ のグラフと t 軸および直線 $t = a$, $t = x$ で囲まれた部分の図形 A の面積を観察する．$t = x$ を変化させれば図形 A の面積も変わるので，これを x の関数とみなして $S(x)$ とおく．ここで x を微小な $h > 0$ だけ増やして，a から $x + h$ までの連続関数 $y = f(t)$ のグラフと t 軸および直線 $t = a$, $t = x + h$ で囲まれた部分の図形の面積 $S(x + h)$ と $S(x)$ の変化量 $\Delta S(x)$ はどうなっているだろうか.



今, $y = f(t)$ は Riemann 積分可能なので, $S(x)$ は定積分

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

である．このとき，一般には「$f(x) \geq f(x+h)$」と「$f(x) \leq f(x+h)$」の 2 パターンあるが，どちらも同じ議論なので $f(x) \geq f(x+h)$ であると仮定する．このとき，上の図からもわかるように

$$h \cdot f(x+h) \leq \Delta S(x) \leq h \cdot f(x)$$

である．辺々を $h > 0$ で割れば

$$f(x+h) \leq \frac{\Delta S(x)}{h} \leq f(x)$$

なので，$h \to 0$ とすれば $\dfrac{\Delta S(x)}{h} \to \dfrac{dS}{dx}(x)$ なので，はさみうちの原理より

$$\frac{dS}{dx}(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

となることがわかった．標語で言えば「**積分して微分すれば元にもどる**」のである．以上の考察のもとで，「原始関数」と呼ばれるものを定義しよう．

【定義：原始関数，不定積分】

- 与えられた関数 $y = f(x)$ に対して，$F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．
- 閉区間で定義された $y = f(t)$ に対して，定義域内の定数 a から変数 x までの定積分

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

を $f(x)$ の**不定積分**という．

• 10-4：微積分学の基本定理

Riemann 積分可能な関数 $y = f(x)$ を定義域内の定数 a から定数 b まで定積分するとき，その計算方法は原始関数の言葉を使えば，極限やシグマを使わなくても比較的容易に計算することができる．

定理 10.1 (微積分学の基本定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で Riemann 積分可能な関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a)$$

が成り立つ．

証明. $S(x)$ を $y = f(x)$ の不定積分とすれば，

$$\frac{d}{dx}\left(S(x) - F(x)\right) = f(x) - f(x) = 0$$

なので，ある定数 C で $S(x) - F(x) = C$ とできる．この式に $x = a$ を代入すれば

$$S(a) - F(a) = C$$

だが，$S(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$ なので $-F(a) = C$ であることがわかる．

次に $x = b$ を代入してみると

$$S(b) - F(b) = C \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

となり，$\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ が示された． □

例 10-2　定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ は，x^2 の原始関数が $\dfrac{1}{3}x^3$ なので

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}\cdot 1^2 - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

• 10-5：不定積分（再）

不定積分 $S(x)$ の下端を a から a' に変えてしまえば，$S(x)$ はどれくらい変化するか考えてみよう．差をとれば

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{a'} f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

であり，最右辺は定数である．つまり，不定積分の下端を変化させても，定数しかズレがないことになる．そこで，$y = f(x)$ の不定積分のグループを，C を定数とすれば

$$\int f(x)dx := \int_a^x f(t)dt + C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と定めることができる．これを改めて $y = f(x)$ の**不定積分**と呼ぶ．

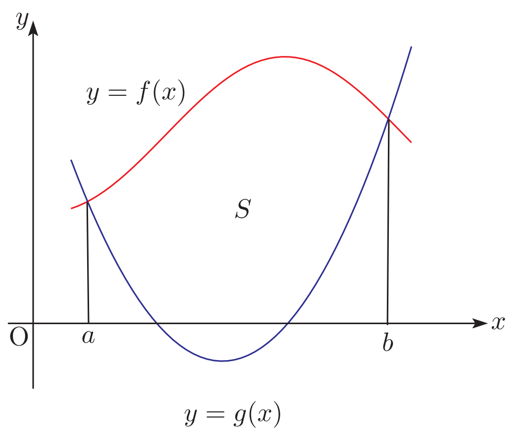
関数 $y = f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすれば，微積分学の基本定理（**定理 10.1**）によって，$\displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ なので，これを①に代入すれば

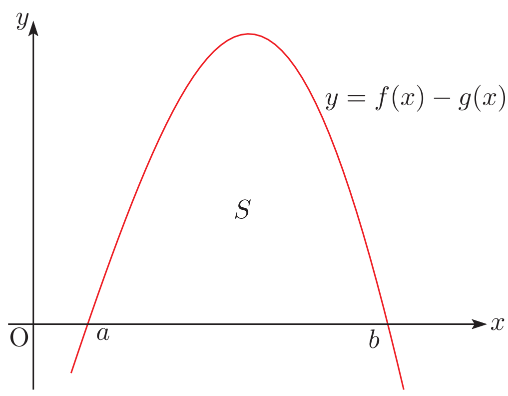
$$\int f(x)dx := F(x) + \text{定数}$$

とかける．この定数を**積分定数**と呼ぶ．

• 10-6：2 曲線で囲まれた面積

曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で Rieman 積分可能であり，$f(x) \geq g(x)$ を満たしているとする．このとき，曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積 S を求めるにはどうすればよいだろうか．





面積 S を等積変形することを考えよう．新たな関数 $h(x) = f(x) - g(x)$ を考えれば，面積 S は右図のような x 軸と $y = h(x)$ の囲まれた部分の面積になる．これの面積は定積分で計算できるから

$$S = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

で求めることができる．

【2 曲線で囲まれる部分の面積】

2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^b \{\text{（グラフが上側の関数）} - \text{（グラフが下側の関数）}\}dx$$

で求めることができる．