11　部分積分と置換積分

前回は, 区分求積法の概念を用いて, 定積分や不定積分を定義した．ここでは, 積分法の基本的な性質や公式を学ぼう．なお, Riemann 積分可能な関数 $y = f(x)$ の不定積分は定積分を用いて

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

と定義されていたので, 定積分で成り立つ性質は不定積分でも成り立つことに注意しておく．

• 11-1 ： 積分の線形性

微分法のときと同様に, 積分法でも線形性が成り立つ．

命題 11.1 (積分の線形性)**.** 閉区間 $[a, b]$ で Riemann 積分可能な関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と定数 α, β に対して, 次の式が成り立つ．

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$$

証明. 関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の原始関数をそれぞれ $y = F(x)$, $y = G(x)$ とすれば, 定数 α, β に対して $\alpha F(x) \pm \beta G(x)$ は $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$ の原始関数である．実際,

$$\{\alpha F(x) \pm \beta G(x)\}' = \alpha F'(x) \pm \beta G'(x) = \alpha f(x) \pm \beta g(x)$$

である．従って,

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\, dx &= \{\alpha F(b) \pm \beta G(b)\} - \{\alpha F(a) \pm \beta G(a)\} \\ &= \alpha\{F(b) - F(a)\} \pm \beta\{G(b) - G(a)\} \\ &= \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

となり, 等式が証明された． □

• 11-2 ： 部分積分法

積の微分法（**定理 3.1**）を用いることで, Riemann 積分可能な関数の積で表された関数の積分が計算できる．

定理 11.2 (部分積分法)**.** 微分可能な関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ に対して, 次の式が成り立つ．

$$\int_a^b \{f(x)g'(x)\}\, dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

証明. 積の微分法より,

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

である．ここで両辺を a から b まで定積分すると

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

である．よって,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

であることがわかった． □

【部分積分もリズムで覚えよう．】

$f(x)g(x)$ の積分の公式は人によっては覚えにくいかもしれないので, 覚え方の一つを紹介する．そもそも, $f(x)$ か $g(x)$ の一方が微分されているのが覚えにくいので, あえて次の形で紹介しよう．

$$\int \{f(x)g(x)\}\,dx \;=\; \underbrace{f(x)}_{\text{そのまま}} \underbrace{\left(\int g(x)dx\right)}_{\text{セキブン}} - \int \underbrace{f'(x)}_{\text{ビブン}} \underbrace{\left(\int g(x)dx\right)}_{\text{セキブン}} dx$$

例 11-1　次の積分を計算してみよう．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$　(2) $\displaystyle\int e^{1-3x}dx$　(3) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

(4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)^6 dx$　(5) $\displaystyle\int x\cos x dx$　(6) $\displaystyle\int \log x dx \quad (x>0)$

(7) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$

積分 $\displaystyle\int \blacksquare\, dx$ の計算の基本は, **$\bigcirc' = \blacksquare$ となる $\bigcirc$ を見つけることである．**　以下, C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \int (2x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$ である．そこで

$$\left\{(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)' = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

なので, 両辺積分して $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = (2x+1)^{\frac{1}{2}} + C$ である．

(2) $(e^{1-3x})' = e^{1-3x}\cdot(1-3x)' = -3e^{1-3x}$ だから, $e^{1-3x} = -\dfrac{1}{3}(e^{1-3x})'$ である．よって両辺を積分して $\displaystyle\int e^{1-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{1-3x} + C$ である．

(3) 2 倍角の公式から $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ である．ここで,

$$\{\sin 2x\}' = 2\cos 2x \quad \Longleftrightarrow \quad \cos 2x = \frac{1}{2}\{\sin 2x\}'$$

だから,

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left\{\int (\cos 2x)dx + \int 1dx\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right) + C = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$$

である．

(4) $\{(2x-1)^7\}' = 7(2x-1)^6\cdot(2x-1)' = 14(2x-1)^6$ なので $(2x-1)^6 = \dfrac{1}{14}\{(2x-1)^7\}'$ である．よって両辺を $\dfrac{1}{2}$ から 1 まで定積分すると

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)^6 dx = \frac{1}{14}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \{(2x-1)^7\}' = \frac{1}{14}\left[(2x-1)^7\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{14}$$

である．

(5) 部分積分の公式（**定理 11.2**）を用いると,

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

である．

(6) $\log x = (\log x) \cdot 1$ なので, 部分積分の公式（**定理 11.2**）を用いると,

$$\int \log x dx = \int (\log x) \cdot 1 dx = (\log x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \log x - x + C$$

である．

(7) 部分積分の公式（**定理 11.2**）を用いると,

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \Big[x^2 e^x \Big]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2\int_0^1 xe^x dx$$

である．再び部分積分の公式（**定理 11.2**）を用いると,

$$\int_0^1 xe^x dx = \Big[ex^x \Big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \Big[e^x \Big]_0^1 = e - 1$$

なので

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2(e-1) = e - 2$$

である．

- **11-3： 置換積分法**

合成関数の微分法（**定理 3.2**）より

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

である．これの両辺を積分することで, 次の式を導くことができた．

定理 11.3 (合成関数の積分法)**.** 微分可能な関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ に対して, 次の式が成り立つ．

$$\int \{f'(g(x))g'(x)\}\, dx = f(g(x)) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

また, 定積分の場合は積分範囲に注意すると次の式が成り立つ．

定理 11.4 (置換積分法)**.** $y = f(x)$ は $[\alpha, \beta]$ 上で Riemann 積分可能とする．微分可能な関数 $t = g(x)$ に対して, 次の式が成り立つ．

$$\int_\alpha^\beta \{f(g(x))g'(x)\}\, dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)dt$$

証明. $y = F(x)$ を関数 $y = f(x)$ の原始関数とすれば, 合成関数の積分法（**定理 11.3**）と微分積分の基本定理（**定理 10．1**）より

$$\int_\alpha^\beta \{f(g(x))g'(x)\}\, dx = \Big[F(g(x)) \Big]_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)dt$$

となる． □

置換積分をする際の手続きをまとめておこう.

【置換積分の手続き】

置換積分を求めるには以下の手続きを踏めばよい.

(I) $t = g(x)$ とおく.

(II) $dt = g'(x)dx$ を形式的に求める.

(III) 積分区間を変換する.（不定積分の場合は不要）

x	$\alpha \longrightarrow \beta$
t	$g(\alpha) \longrightarrow g(\beta)$

(IV) 定積分（不定積分）する.

(V) 不定積分の場合は, t の式を x の式に戻す.

特別な場合の置換積分もここに書いておこう.

- 被積分関数の中に $\sqrt{a^2 - x^2}$ がある場合 $\Longrightarrow$ $x = a\sin\theta$ もしくは $x = a\cos\theta$ とおく.
- 被積分関数の中に $\sqrt{a^2 + x^2}$ がある場合 $\Longrightarrow$ $x = a\tan\theta$ とおく.

例 11-2　次の積分を計算してみる.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-2x}dx$$

そこで, 置換積分法を用いるために $t = 1 - 2x$ とおく. このとき,

$$dt = -2dx \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2}dt = dx$$

である. $t = 1 - 2x$ だから, 積分区間は以下のように変更される.

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$
t	$1 \longrightarrow 0$

以上で求める積分は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-2x}dx. &= \int_1^0 \frac{1}{2}(1-t)\sqrt{t}\cdot(-\frac{1}{2})dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)dt = \frac{1}{15}\end{aligned}$$

である.