# 12　有理関数の積分

ここでは, 有理関数と呼ばれる関数に対して, その積分を計算する手法を具体的に学ぶ.

**• 12-1 : 有理関数と部分分数分解**

2 つの多項式 $f(x)$ と $g(x)$ に対して, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の形の関数を**有理関数**という. ただし, 有理関数は $g(x) \neq 0$ となるような $x$ に対してのみ定義される. 多項式 $f(x)$ に対して, $f(x) = \dfrac{f(x)}{1}$ とかけるので多項式は有理関数である. $f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $q(x)$, 余りを $r(x)$ とおけば, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ という形にかけるから,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad (r(x) \text{ の次数は } g(x) \text{ の次数よりも小さい})$$

という形にできる. 従って, 分子の次数の方が分母の次数よりも小さい場合を考えれば十分である. このような有理関数を**真分数式**という. 有理関数の場合は「部分分数分解」を利用して, $\log f(x)$ や $\tan^{-1} f(x)$ の積分公式を利用することで積分を計算することができる.

では, 有理関数の積分を計算する上での基本的な主張を紹介しよう.

**定理 12.1** (部分分数分解)**.** 任意の真分数式は

$$\frac{A}{(x-a)^\ell}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} \quad (p^2-4q<0)$$

という形の真分数式の和で表すことができる. ただし, $A, B, C, p, q$ は定数で $\ell, m$ は自然数である.

**証明.** 真分数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を考える. $g(x)$ の実数の範囲で因数分解した結果が

$$g(x) = c(x-a_1)^{\ell_1} \cdots (x-a_s)^{\ell_s}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdots (x_2+p_tx+q_t)^{m_t}$$

となったとしよう. ただし, $j = 1, 2, \ldots, t$ に対して $p_j^2 - 4q_j < 0$ であるとする. このとき,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{A_{i,1}}{x-a_i} + \cdots + \frac{A_{i,\ell_i}}{(x-a_i)^{\ell_i}}\right\} + \sum_{j=1}^{t}\left\{\frac{B_{j,1}x+C_{j,1}}{x^2+p_jx+q_j} + \cdots + \frac{B_{j,m_j}x+C_{j,m_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}}\right\}$$

とかける. ただし, 右辺の分子に現れる定数は, 両辺を $x$ の恒等式として比較することで求めることができる. (同じ次数の $x^k$ の係数を比較すれば良い. ) □

**例 12-1**　有理関数

$$\frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1}$$

の部分分数分解を求める. まず,

$$x^4+x^3+x^2+2x+3 = (x+1)(x^3+1) + x^2+x+2$$

なので,

$$\frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1} = x+1+\frac{x^2+x+2}{x^3+1} = x+1+\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

である. そこで,

$$\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

とおく.

両辺に $(x+1)(x^2-x+1)$ をかけると

$$x^2+x+2=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1) \iff x^2+x+2=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)$$

を得る．これを $x$ の恒等式とみて係数を比較すると

$$A+B=1, \quad -A+B+C=1, \quad A+C=2$$

である．これを解けば $A=\dfrac{2}{3}$, $B=\dfrac{1}{3}$, $C=\dfrac{4}{3}$ を得る．従って,

$$\frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1}=x+1+\frac{\frac{2}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}}{x^2-x+1}$$

が求める部分分数分解である．

- **12-2：有理関数の積分**

有理関数の不定積分は, 原理的には計算できる．まず, 前節 **12-1** と同じように, 割り算を実行することで有理関数を $\dfrac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\dfrac{r(x)}{g(x)}$ と書き換える．$q(x)$ は多項式なので積分を計算できて, あとは真分数式 $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ の部分が計算できればよい．真分数式の部分は, **定理 12.1** によって部分分数分解することで

$$\frac{A}{(x-a)^\ell}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} \quad (p^2-4q<0)$$

の形の式が積分できればよい．前半の部分の積分は簡単に計算できる．

**命題 12.2.** 定数 $A$, $a$ に対して, 次が成り立つ．（ただし積分定数は省略する．）

$$\int \frac{A}{(x-a)^\ell}dx=\begin{cases} A\log|x-a| & (\ell=1) \\ \dfrac{A}{(1-\ell)(x-a)^{\ell-1}} & (\ell>1) \end{cases}$$

後半の部分は, 対数関数の積分法または逆正接関数の積分を用いることで計算できる．つまり, 基本的には次の積分の式を利用する．

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$ .
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx=\tan^{-1}x+C$

有理関数を積分する手続きをまとめておこう．

**【有理関数の積分の手続き】**

有理関数を積分するには以下の手続きを踏めばよい．

(I) 有理関数の割り算を実行して, 多項式と真分数式の和にする．

(II) 真分数式のパートを部分分数分解する．

(III) **命題 12.2**, 対数関数, 逆正接関数の積分法を使って真分数式のパートの積分を計算する．

こうやって, 部分分数分解を利用すればどんな有理関数も積分できるんだね．
計算が大変なのは, 部分分数分解したときに分母に 2 乗が出てくるところだね．
分母が 2 乗で, 分子が定数のところは「平方完成すること」がキーポイントだよ!

**例 12-2**　不定積分

$$\int \frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1}dx$$

を求めよう．**例 12-1** によって

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1}dx &= \int (x+1)dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+4}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{x+4}{x^2-x+1}dx\end{aligned}$$

なので，$\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-x+1}dx$ が計算できれば良い．

まず，$(x^2-x+1)' = 2x-1$ なので，

$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{9}{2}}{x^2-x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{9}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| + \frac{9}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx\end{aligned}$$

次に $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+1}dx$ の部分だが，分母を平方完成して $\displaystyle\int \frac{1}{\blacksquare^2+1}$ の形をつくると，

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\{\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\}^2+1}dx$$

である．ここで，$t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと，$dt = \dfrac{2}{\sqrt{3}}dx$ なので $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}dt$ であるから

$$\frac{4}{3}\int \frac{1}{\{\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\}^2+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}t + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}+C$$

以上で

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1}dx = \frac{1}{2}x^2+x+\frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\log|x^2-x+1| + \frac{9}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2+x+\frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\log|x^2-x+1| + \frac{9}{2}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}\right)+C \\ &= \frac{1}{2}x^2+x+\frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{1}{6}\log|x^2-x+1| + \sqrt{3}\tan^{-1}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}+C \\ &= \frac{1}{2}x^2+x+\log|x+1|^{\frac{2}{3}}|x^2-x+1|^{\frac{1}{6}} + \sqrt{3}\tan^{-1}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}+C\end{aligned}$$

である．

長くて複雑な計算だったね!
一番，計算ミスが起こるポイントは $\displaystyle\int \frac{1}{\blacksquare^2+1}$ の形をつくるところだよ．
分母分子が逆になって計算結果がおかしくなるようなケアレスミスはなくそう!