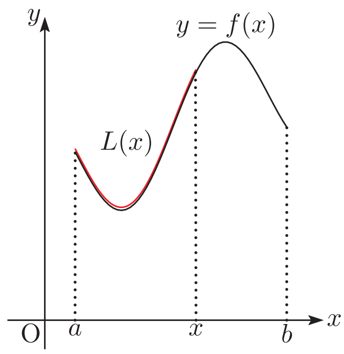
# 13　積分の応用

区分求積法の考え方を用いて定積分が定義された．定積分は定義から計算することは初等関数でも困難だが，微分積分の基本定理より原始関数を用いることで計算が可能になった．更に，微分法と積分法の関係が明らかになった．ここでは積分法を応用して，曲線の長さや回転体の体積，簡単な微分方程式の解き方を学ぶ．

### • 13-1：曲線の長さ

曲線 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における曲線の長さを求めるにはどうずればよいだろうか．ここでは，閉区間 $[a, b]$ で連続であり，開区間 $(a, b)$ において微分可能な関数 $y = f(x)$ を考える．閉区間 $[a, b]$ 上の関数 $L(x)$ を，点 $a$ から点 $x$ までにおける曲線 $y = f(x)$ の長さであるとしよう．



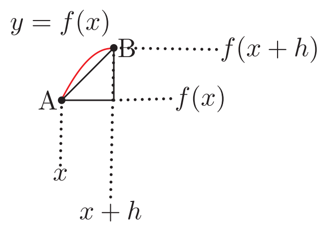

関数 $L(x)$ の変化率を調べてみる．$h > 0$ として，微小区間 $[x, x + h]$ における曲線 $y = f(x)$ の長さは $\Delta L(x) = L(x + h) - L(x)$ である．$h$ が十分小さいとき，線分 AB に近似される．つまり，

$$\Delta L(x) \fallingdotseq \sqrt{h^2 + \{f(x + h) - f(x)\}^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．上式は

$$\Delta L(x) \fallingdotseq h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right)^2}$$

$$\iff \quad \frac{\Delta L(x)}{h} \fallingdotseq \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right)^2}$$




となる．$h \to 0$ のとき誤差は 0 に限りなく近づくから，両辺において $h \to 0$ の極限をとれば

$$L'(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$$

を得る．両辺を $a$ から $b$ まで定積分すればよいので次の公式を得た．

**定理 13.1** (曲線の長さ)**.** 閉区間 $[a, b]$ 上で連続で，$(a, b)$ で微分可能な関数を $y = f(x)$ とする．$a$ から $b$ までの曲線の長さ $L$ は次の式で与えられる．

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}dx$$

**例 13-1**　曲線 $y = \sqrt{1 - x^2}$ において，$x = -1$ から $x = 1$ までの曲線の長さを求めてみよう．求める長さを $L$ とおくと，

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \Big[\sin^{-1} x\Big]_{-1}^1 = \pi$$

であることがわかる．

### • 13-2：媒介変数表示をもつ曲線の長さ

曲線 $y = f(x)$ において，媒介変数 $t$ を用いて $x = x(t)$, $y = y(t)$ と表されているとする．このとき，$t$ を $a$ から $b$ まで変化させたとき曲線 $y = f(x(t))$ の長さ $L$ の求め方も **13-1** 節と同様に考えれば良い．

閉区間 $[a, b]$ 上の関数 $L(t)$ を，点 $a$ から点 $t$ までにおける曲線 $y = f(x(t))$ の長さであるとしよう．関数 $L(x(t))$ の変化率は ① より

$$\Delta L(x) \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

である．よって，

$$\Delta L(t) = \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\right)\Delta t \iff \frac{\Delta L(t)}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

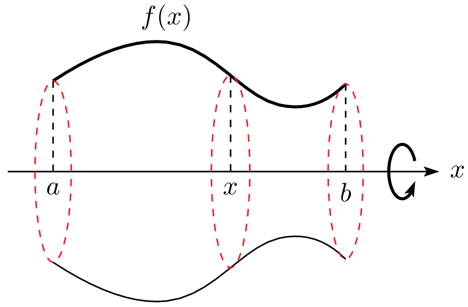
ここで, $\Delta t \to 0$ として $a$ から $b$ まで定積分することで次を得た.

**定理 13.2** (曲線の長さ)**.** $x$, $y$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続で, $(a,b)$ で微分可能な関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ とする. このとき, $a$ から $b$ までの曲線の長さ $L$ は次の式で与えられる.

$$L = \int_a^b \left(\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}\right) dt$$

- **13-3： $x$ 軸まわりの回転体の体積**

区間 $[a,b]$ 上で連続であって, 区間 $(a,b)$ 上で微分可能な関数 $y = f(x)$ と $x$ 軸とで挟まれる図形を $x$ 軸まわりに回転してできる回転体の体積は積分法を使って求めることができることを確認しよう.




求める体積を $V$ とおく．微小区間 $[x, x+\Delta x]$ 内にある微小体積 $\Delta V$ は $\Delta x$ が十分小さいときは半径が $f(x)$, 高さが $\Delta x$ の円柱に近似できるから

$$\Delta V \fallingdotseq \pi\{f(x)\}^2 \Delta x$$

である．両辺を $\Delta x$ で割って $\Delta x \to 0$ とすれば

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \pi\{f(x)\}^2$$

を得る．従って求める体積は, これを $a$ から $b$ まで定積分すればよいので

$$V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$$

であることがわかった.

**定理 13.3** ($x$ 軸まわりの回転体の体積)**.** 閉区間 $[a,b]$ 上で連続で, $(a,b)$ で微分可能な関数を $y = f(x)$ とする．直線 $x = a$, $x = b$ および $x$ 軸で囲まれる領域を $x$ 軸まわりに 1 回転させてできる図形の体積 $V$ は次の式で与えられる.

$$V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$$

**例 13-2**　区間 $[0,\pi]$ の範囲で, 曲線 $y = x\sin x$ と $x$ 軸とで挟まれる領域を $x$ 軸まわりに回転して得られる図形の体積を求めよう．求める体積を $V$ とすれば,

$$V = \int_0^\pi \pi(x\sin x)^2 dx = \pi\int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^\pi x^2 dx - \int_0^\pi x^2\cos 2x dx\right\} = \frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^2}{4}$$

である.

**【USA 式部分積分法 】**

$\int$(整式) $\times$ (三角関数 / 指数関数 / 対数関数)$dx$ の形の積分は, USA 式部分積分というテクニックで計算時間を大幅に節約できる． USA 式部分積分は次の例で示すような計算テクニックである. **整式の部分は微分を繰り返し，三角関数 / 指数・対数関数の部分は積分を繰り返す**のがポイントである.

**例 13-3**　例えば, 次のような積分を USA 式部分積分法で計算してみよう.

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$$

整式のパートが $x^2$, 三角関数のパートが $\cos 2x$ であるから, $x^2$ の微分を 0 になる直前まで繰り返したものを第一列にかき, 次に $\cos 2x$ を第一列よりも 1 回多くなるように積分を繰り返したものを第二列にかく. 第三列には $+, -, +, \ldots$ と交互にかく. その後, 第一列と第二列を図のように斜めに掛け算する.

| 微分 | 積分 | 符号 |
|---|---|---|
| $x^2$ | $\cos 2x$ | |
| $2x$ | $\frac{1}{2}\sin 2x$ | $+$ |
| $2$ | $-\frac{1}{4}\cos 2x$ | $-$ |
| | $-\frac{1}{8}\sin 2x$ | $+$ |

このとき, 求める積分は

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \left[ x^2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x - \left\{ 2x \cdot \left( -\frac{1}{4}\cos 2x \right) \right\} + 2 \cdot \left( -\frac{1}{8}\sin 2x \right) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

慣れれば部分積分の計算速度がグッとはやくなるはずだよ!
でも, テクニックばかりに捉われないで丁寧に計算することも忘れないでね.

- **13-4 : 変数分離型の微分方程式**

$y$ が $x$ の関数であるとする. このとき,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x) \times q(y) \quad ただし, q(y) \neq 0$$

という形をした微分方程式を**変数分離型**という. これの一般解は次のように求める.

まず, 両辺を $q(y)$ で割り,

$$\frac{1}{q(y)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)$$

という形をつくる. ここで両辺を $x$ で積分すれば

$$\int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(x) dx$$

となる. この両の積分を計算することで $y$ の式を得る. この一般解は積分定数を 1 つ含むので, 初期条件によって積分定数を適切に求めることも重要である.

**例 13-4**　$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ であるとする. このとき, 微分方程式 $xy' = y$ を解こう.

これは $y' = \frac{1}{x} \times y$ なので, 変数分離型である. 従って,

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

を計算すれば良いが, これは $C$ を積分定数とすれば

$$\log|y| = \log|x| + C$$

である. ここで, $C = \log C'$ とおくと

$$\log|y| = \log C'|x|$$

なので $|y| = C'|x|$ を得る. 従って $y = \pm C'x$ だが, $C'' = \pm C$ とおくと $y = C''x$ が一般解である.