# 14　広義積分

積分範囲のなかに不連続点や $\pm\infty$ に発散するような定積分を「広義積分」と呼ぶ．今回は，この広義積分の処理の仕方について学ぶ．

**● 14-1： 不連続点や発散する点を含む広義積分**

積分する関数 $y = f(x)$ が区間 $[a, b)$（あるいは区間 $(a, b]$）で連続であり，その端点 $x = b$（あるいは $x = a$）で不連続または発散するとき，$y = f(x)$ を $a$ から $b$ まで定積分するにはどのようにすれば良いだろうか．その答えは，**少し手前まで定積分して，端点への極限をとる**ことである．

**【定義：広義積分 I】**

区間 $[a, b)$ で連続な関数 $y = f(x)$ について，$x = b$ で $y = f(x)$ は発散あるいは不連続であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x)dx$$

と定義する．また，$y = f(x)$ が区間 $(a, b]$ で連続であり，$x = a$ で $y = f(x)$ は発散あるいは不連続であるときは

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+0} \int_c^b f(x)dx$$

と定義する．積分区間の両端点 $x = a$, $x = b$ において発散あるいは不連続であるとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c \to a+0 \\ c' \to b-0}} \int_c^{c'} f(x)dx$$

と定義する．このような積分は**広義積分**と呼ばれる．右辺の極限が有限の値ではないとき，広義積分は**発散する**あるいは**存在しない**という．

**例 14-1**　広義積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ を求めよう．積分する関数は $x = 1$ で発散するので広義積分である．そこで $c > 1$ として広義積分を計算すると

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{c\to1+0} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{c\to1+0} \left[2\sqrt{x-1}\right]_c^2 = \lim_{c\to1+0} \left(2 - 2\sqrt{c-1}\right) = 2$$

である．

**例 14-2**　広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を求めよう．積分する関数は $x = \pm1$ で発散するので広義積分である．そこで $c > -1$, $c' < 1$ として広義積分を計算すると

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\substack{c \to -1+0 \\ c' \to 1-0}} \int_c^{c'} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\substack{c \to -1+0 \\ c' \to 1-0}} \left[\sin^{-1} x\right]_c^{c'} = \lim_{\substack{c \to -1+0 \\ c' \to 1-0}} (\sin^{-1} c' - \sin^{-1} c)$$

である．最右辺の極限は $c \to -1+0$, $c \to 1-0$ は同時に近づけることに注意して

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} 1 - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

と計算できる．

**【積分区間の中に不連続点や発散する点がないかを十分に確認する】**

**例 14-3**　定積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x}dx$ を計算すれば，これは $x=0$ で発散するので広義積分であり，$c>0$ として

$$\int_0^3 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to+0}\int_c^3 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to+0}(\log 3 - \log c) = \infty$$

となる．一方，$\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{1}{x}dx$ を $x=0$ で発散することを無視して無理やり計算してしまうと

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x}dx = \Big[\log|x|\Big]_{-2}^{3} = \log 3 - \log 2 \quad (?)$$

となり，より広い区間で積分しているのに有限の値になって不合理である．つまり，$\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{1}{x}dx$ の計算は間違いである．このようなミスがないように気をつけよう．

● **14-2： 無限区間の広義積分**

次に，積分区間の端点が $\pm\infty$ であるような無限区間での積分について考えよう．

**【定義：広義積分 II】**

区間 $[a,\infty)$ で連続な関数 $y=f(x)$ について，

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$$

と定義する．また，$y=f(x)$ が区間 $(-\infty, b]$ で連続であれば

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx$$

と定義する．最後に

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{c\,\to\,-\infty\\ c'\,\to\,\infty}}\int_c^{c'} f(x)dx$$

と定義する．このような積分も**広義積分**と呼ばれ，右辺の極限が有限の値ではないとき，広義積分は**発散する**あるいは**存在しない**という．

**例 14-4**　広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$ を計算すると，次のようになる．

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{c\to\infty}\Big[\tan^{-1}x\Big]_0^c = \lim_{c\to\infty}\left(\tan^{-1}c - \tan^{-1}0\right) = \frac{\pi}{2}$$

**【無限区間での広義積分における $\pm\infty$ の取り扱い】**

無限区間における $\pm\infty$ という記号は，ある程度までは形式的に扱ってもよい．例えば，

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \Big[\tan^{-1} x\Big]_0^{\infty}$$

としてもよい．ただし，**$\pm\infty$ を数値のように代入する行為は禁止である．**例えば，

$$\Big[\tan^{-1} x\Big]_0^{\infty} = \underline{\underline{\tan^{-1}\infty}} - \tan^{-1} 0$$

のような書き方をしてはいけない．同様に，$\dfrac{1}{\infty}$ などのような書き方をしてはいけない．

不連続点においても，**代入できないのに代入してはいけない．** 例えば，$\dfrac{1}{0}$ などのような書き方を数学ではしてはいけない．

$\infty$ は数字ではなくて記号だから，代入のような操作をしてはいけないんだよ．
減点の対象になるからよく注意してね．

- **14-3 : $\Gamma$ 関数**

広義積分を用いて定義される重要な関数に次式で定義れるガンマ関数（$\Gamma$ 関数）と呼ばれるものがある．

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

この関数は，自然数の階乗の一般化だと見なすことができる．

**定理 14.1** (ガンマ関数の性質)**.** ガンマ関数に関して，次の性質が成り立つ．

(1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ となる．
(2) 自然数 $n$ に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ となる．

**証明.** (1) 部分積分法（定理 11.2）を用いれば，

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x}dt = \Big[-e^{-t}t^{x}\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-t})xt^{x-1}dt = x\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x-1)$$

である．

(2) (1) の式に自然数 $n$ を代入すれば

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1)$$

が成り立つ．ところで，

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{\infty} = 0-(-1) = 1$$

なので，$\Gamma(n) = (n-1)!$ であることが示された． □

このガンマ関数を用いることで，有名な $\dfrac{1}{2}! = \sqrt{\pi}$ などを導くことができる．興味がある人はより勉強してみるのもよいだろう．