15　積分法の演習

【演習 15-1】　不定積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\int\left(4x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{4}}\right)dx$　　(2) $\displaystyle\int\sin 3x\cos 2x dx$

(3) $\displaystyle\int x^2\sin x dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}dx$

解　答

以下, C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int\left(4x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{4}}\right)dx=4\int x^{\frac{1}{3}}dx+3\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-\frac{1}{4}}dx=3x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C.$

(2) $\displaystyle\int\sin 3x\cos 2x dx=\int\frac{\sin 5x+\sin x}{2}dx=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C.$

(3) 部分積分すればよいから,

$$(\text{与式})=-x^2\cos x+2\int x\cos x dx=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x+C)=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$

となる. ここで, $2C$ を改めて C とおいた.

(4) 分母を実数の範囲で因数分解すれば $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ である. そこで,

$$\frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

とおくと, 右辺を通分すれば $\dfrac{(a+b)x^2+(-b+c)x+a-c}{(x-1)(x^2+1)}$ なので, 左辺の分子と比較すると

$$a+b=1,\quad -b+c=1,\quad a-c=0$$

を得る. これらを連立して解くと $a=1$, $b=0$, $c=1$ となる. 従って,

$$\int\frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=\log|x-1|+\tan^{-1}x+C.$$

【演習 15-2】

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くことにより, 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}$ を求めよ.

解　答

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく. $\tan^2\dfrac{x}{2}+1=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ より $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{t^2+1}$ である. ここで $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$ なので

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

である. 三角形の相互関係から $\sin x=\tan x\cos x$ であるので

$$\sin x=\tan x\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

となる. 合成関数の微分法より

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{t^2+1}}=\frac{t^2+1}{2}$$

であるから, $dx = \dfrac{2}{t^2+1}dt$ を得る. 以上で, 求める不定積分は

$$\int \frac{1}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{t^2+1}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

である. ただし, C は積分定数である.

【演習 15-3】　次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}dx$

解　答

(1) 積分する関数は $x=0$ で定義されていないから

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_{-1}^{0} x^{-\frac{2}{3}}dx + \int_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim_{c\to -0}\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{c} + \lim_{c'\to +0}\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{c'}^{1} = 6.$$

(2) 無限区間での積分なので

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \lim_{c\to\infty}\int_{1}^{c} \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \lim_{c\to\infty}\int_{1}^{c}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

である. よって

$$\lim_{c\to\infty}\left[\log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{1}^{c} = \lim_{c\to\infty}\left(\log\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - \log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \log 1 - \log 1 + \log\sqrt{2} = \log\sqrt{2}$$

【演習 15-4】

$a > 0$ とする. 曲線 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ の長さを求めよ.

解　答

求める長さを L と置くと,

$$L = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left\{\frac{\mathrm{d}(a\cos^3 t)}{\mathrm{d}t}\right\}^2 + \left\{\frac{\mathrm{d}(a\sin^3 t)}{\mathrm{d}t}\right\}^2}dt = 3a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}dt = 3a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt.$$

ここで, $\displaystyle\int_{\sin}^{t} \cos t dt = \frac{1}{2}\sin^2 t + C$（$C$ は積分定数）だから

$$L = 3a\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a.$$

【演習 15-5】　関数 $f(x) = e^x$ を 0 から 1 まで定積分したものを区分求積法によって求めたい. 区間 $[0,1]$ を n 等分し,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 和 $S(n)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n)$ を求めよ.

解　答

(1) 等比級数の和の公式を使えば

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^{k-1} = \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}.$$

(2) (1) より $\displaystyle \lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e}{\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}}$$

であるが, $h = \dfrac{1}{n}$ とおくと $n \to \infty$ のとき $h \to 0$ なので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-e}{\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}} = \lim_{h\to 0} \frac{1-e}{\frac{1-e^{h}}{h}} = \frac{e-1}{\lim_{h\to 0} \frac{e^{h}-1}{h}} = \frac{e-1}{1} = e-1$$

となる.