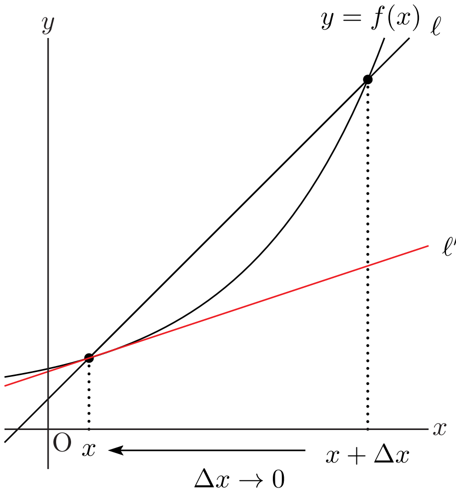
2　微分の利用

• 2-1：変化率

前回, 微分をするということはその関数 $f(x)$ の瞬間的な変化の割合を調べることということを学んだ.



上の図において, x が x から $x + \Delta x$ まで変化したとき, 関数 $y = f(x)$ は $f(x)$ から $f(x + \Delta x)$ まで変化している. このとき, $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$$

で定義したことを思い出そう. 瞬間的な変化の割合を求めることは. x と $x + \Delta x$ の幅を小さくするということなので,

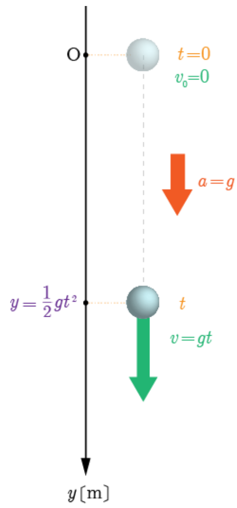
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

で求めることができる. これが前回学んだ「点 x での微分係数」であるが, これを関数 $f(x)$ の x に対する**変化率**とも呼ぶ.

例 2-1　物体の自由落下を考えよう. 手に持っていた物体をそっと放したとき, t 秒後の物体の変位（物体を放した場所からの距離）を y とすると, 空気抵抗を無視できるとすれば

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

であることが知られている. ここで g は重力加速度と呼ばれる定数で $g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$ である. このとき, 時刻 t から $t + \Delta t$ までの y 平均変化率は



$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}g \cdot \frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}g(2t + \Delta t)$$

であるから, y の時刻 t に対する変化率は

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2}g(2t + \Delta t) = gt$$

となる. これは自由落下したときの時刻 t での速度である.

例 2-2　一辺の長さが a の立方体の面の対角線長を p とする．立方体の体積を V とするとき, V の p に対する変化率を求めてみよう．三平方の定理より $p = \sqrt{2}a$ なので $a = \dfrac{p}{\sqrt{2}}$ である．立方体の体積は $a^3 = \dfrac{p^3}{2\sqrt{2}}$ だから立方体の体積を V とするとき, V の p に対する変化率は $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = \dfrac{3p^2}{2\sqrt{2}}$ である．

- **2-2：速度, 加速度**

例 2-1 では, 自由落下を例にして変化率というものの正体を考察した．これに倣って, x 軸上を運動する物体の場合について述べよう．時刻 t での物体の x 座標を $x(t)$ とする．このとき, 時刻 t に対する $x(t)$ の変化率は

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

であり, これを**速度**と呼ぶ．速度は再び t の関数なので, 時刻 t に対する $v(t)$ の変化率を考えることができて, これは

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

で求めることができる．これを物体の運動の**加速度**という．すなわち, 標語的に言えば

「**位置の微分が速度で, 速度の微分が加速度**」

ということになっている．

例 2-3　x 軸上を運動する物体の時刻 t での変位が $x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$ で表されているとする．この物体の時刻 t での速度は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2) = v_0 + at$$

である．また時刻 t での加速度は, 更に t で微分すれば良いから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0 + at) = a.$$

- **2-3：高階導関数**

速度 $v(t)$ の微分が加速度 $a(t)$ であったが, 変位の関数 $x(t)$ から見れば $x(t)$ を t で「2 回微分している」ことになる．このように, 関数 $f(x)$ がある区間 I で繰り返し微分できる状況を考えよう．

【定義：n 階導関数】
区間 I で微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が再び微分可能であるとき, 関数 $f(x)$ は**2 回微分可能**という．その導関数を $f(x)$ の**2 階導関数**という．これを

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x), \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)$$

とかく．同様に, 2 階導関数が微分可能であるとき, その導関数を 3 階導関数という．一般に, $n \in \mathbb{N}$ に対して, この操作を n 回繰り返して行うことができるとき, 関数 $f(x)$ は区間 I で**n 階微分可能**という．このとき, n 回微分して得られた関数を $f(x)$ の**n 階導関数**と呼び, 記号で

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x), \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x)$$

のように書く．一般に, 2 階以上の導関数を**高階導関数**と呼ぶ．

便宜上, $f^{(0)}(x)$ を「0 階導関数」, $f^{(1)}(x)$ を「1 階導関数」としておくと, 任意の $n \geq 0$ に対して n 階導関数が $f^{(n)}(x)$ と表すことができる.

例 2-4　関数 $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ に対して,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = 6x + 2, \quad \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(x) = 6, \quad \frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}(x) = 0$$

である.

例 2-5　関数 $f(x)$ が次のように定義されていたとしよう.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

これは $x > 0$ と $x < 0$ の範囲では微分可能である. 問題なのは $x = 0$ のところなので, $x = 0$ で微分可能かどうか調べてみる. いま,

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{f(0+h)f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+0} \frac{h^2}{h} = 0, \quad \lim_{h \to 0-0} \frac{f(0+h)f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+0} \frac{h^2}{h} = 0$$

なので $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であり, $f'(0) = 0$ である.

ところで, $x > 0$ のときは $f'(x) = 2x$, $x < 0$ のときは $f'(x) = -2x$ だから, $x = 0$ のときと合わせて $f'(x) = 2|x|$ で表すことができる. しかし, **例 1-5** でみたように $f'(x)$ は $x = 0$ で微分可能ではないから, 関数 $f(x)$ は 1 回微分可能だが, 2 回微分可能ではないことがわかる.

• 2-4 : 微分方程式とは

一般に, 方程式 $f(x) = 0$ を解くとは, $f(x) = 0$ を満たすような値 x を求めることをいう. 例えば, $x^2 + 2x + 1 = 0$ を解くとは, $x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0$ となり, 解は $x = -1$ である.

関数 $y = f(x)$ に対して, その導関数 $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ の間の関係式

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

で与えられる方程式を**n 階の微分方程式**という. このとき, 未知であるのは関数 $y = f(x)$ であり, これを具体的に求めることを**微分方程式を解く**という.

微分方程式は, 関数 y が未知で「y を何回か微分した関数たち」による等式のことだよ.
それを解くっていうのは, 未知だった関数 y はどんな関数でしょう？ っていう
のを求めるってこと.
だから, 解は値じゃなくて関数になることを抑えておいてね.

関数を求めるってすごく難しそう...
身近にそんな微分方程式なんてないから, あんまり想像がつかないよ...

むしろ世界は微分方程式だらけなんだよ！
ウイルスの広がり, 波のシミュレーション, 金属の加工なんてのも
全部, 微分方程式をつかってモデル化してるんだ.
高校でならった運動方程式も微分方程式の一種だよ.

そっか！
運動方程式って $m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) - F = 0$ って形だもんね!

例 2-6　未知の関数 $y = f(x)$ が微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 2$$

を満たしているとする．これを解いてみよう．まず, 両辺を 1 回積分すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + C_1$$

となる．ここで C_1 は積分定数である．これをさらに積分すれば

$$y = x^2 + C_1 x + C_2$$

となる．ここで C_2 も積分定数である．

逆に $y = x^2 + C_1 x + C_2$ を 2 回微分すれば $y'' = 2$ となるから $y = x^2 + C_1 x + C_2$ は与えられた微分方程式の解である．このように, 一般的には n 階の微分方程式の解には積分定数が n 個現れることになる．

• 2-5：微分方程式と数理モデリング

現代における物理現象を観察し, それを抽象化して定式化することでその現象を捉える「数理モデル」をつくることができる．数理モデルをつくるには, 様々な実験, 観察や多様なものの見方, 捉え方をすること, そしてそのためには様々な知見をもつことが重要である．大学でサイエンスを学ぶ, ということは様々な学問の古典（土台）をしっかりと身につけ, それらを踏襲, 改善することで新しいことを生み出す力を養うことである．

ここでは, 微分方程式の応用として, マルサスの人口モデルを例にあげよう．

例 2-7 (マルサスの人口モデル)　ある国の, 時刻 t での総人口 $N = N(t)$ を考える．時刻 t から $t + \Delta t$ までの出生数と死亡数は, 任意の t での次の規則に従うと仮定する．

(a) 出生数は, そのときの人口および時間幅 Δt に比例する．
(b) 死亡数は, そのときの人口および時間幅 Δt に比例する．

これらの仮定に基づき $N(t)$ の満たす微分方程式を作ろう．まず, 時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ での出生数を $B(t)$ とおけば, 仮定 (a) から

$$B(t) = aN(t)\Delta t \quad (a \text{ は定数})$$

で表すことができる．また, 時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ での出生数を $D(t)$ とおけば, 仮定 (b) から

$$D(t) = bN(t)\Delta t \quad (b \text{ は定数})$$

で表せる．すると時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ までの人口の変化は

$$N(t + \Delta t) - N(t) = B(t) - D(t) = (a - b)N(t)\Delta t$$

である．両辺を Δt で割って, $\Delta t \to 0$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t) = (a - b)N(t)$$

という微分方程式を得る．これは時刻 t での瞬間の人口の変化率を表す．