3　微分法の基本公式

- **3-1 ： 積・商の微分公式**

関数の積や商で表されている関数の微分に関しては次の公式が成り立つ.

定理 3.1 (積と商の微分法)**.** 区間 I 上で微分可能な関数 $f(x), g(x)$ に対して次が成り立つ.

(1) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(2) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (g(x) \neq 0)$

証明. (1) 区間 I 上で微分可能な関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

となり, (1) が成り立つ.

(2) $f(x), g(x)$ は区間 I で微分可能とし, 任意の $x \in I$ に対して $g(x) \neq 0$ とする. また,

$$
h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}
$$

と定義する. このとき, $f(x) = h(x)g(x)$ である. 従って (1) より

$$
f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x) = h'(x)g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)
$$

なので,

$$
h'(x) = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
$$

となり, (2) が成り立つ. □

【積の微分はリズムで覚えよう】

$f(x)g(x)$ の微分の公式は人によっては覚えにくいかもしれないので, 覚え方の一つを紹介する.

$$
(f(x)g(x))' = \underbrace{f'(x)}_{\text{ビブン}}\ \underbrace{g(x)}_{\text{まんま}} + \underbrace{f(x)}_{\text{まんま}}\ \underbrace{g'(x)}_{\text{ビブン}}
$$

こうして, リズムで覚えることで忘れにくくなるし,

$$
(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)
$$

などというミスも減る.

だだし, 暗記をしなさいというわけではない. このような公式は, **使っていくうちに体得する**ものであり, 練習を重ねていくうちに考えたり思い出さなくても使えるようになっていくものである. そうして初めて自分の中で会得したことになるということを意識してほしい.

- **3-2：合成関数の微分公式**

$A \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $y = f(x)$ と $B \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $y = g(x)$ があったとする．関数 $f(x)$ の値域が B の部分集合であると仮定しよう．このとき, 任意の $x \in A$ に対して $y = f(x)$ が対応しており, 仮定から $y \in B$ だからこの y に対して $z = g(y)$ が対応する．こうして, $x \in A$ に対して, $g(f(x))$ を対応させる新たな関数が定義される．これを $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**といい, 記号で $(g \circ f)(x)$ と表す．

例 3-1　関数 $f(x) = x^2$ と $g(x) = 3x + 1$ を考えよう．このとき,

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 + 1$.

【合成関数は順序に注意しよう】

関数 $f(x)$, $g(x)$ の合成関数には,「$f(x)$ を $g(x)$ の x に代入する $(g \circ f)(x)$」と「$g(x)$ を $f(x)$ の x に代入する $(f \circ g)(x)$」の二つがあるが, **例 3-1** でみたように一般には

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

である．

合成関数の微分に関して, 次の定理が成り立つ．

定理 3.2 (合成関数の微分法)**.** $a \in \mathbb{R}$ として, $f(x)$ を $x = a$ で微分可能な関数, $g(y)$ を $y = f(a)$ で微分可能な関数とする．このとき, 等式

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

が成り立つ．

証明. $a \in \mathbb{R}$ として, $f(x)$ を $x = a$ で微分可能な関数, $g(y)$ を $y = f(a)$ で微分可能な関数とする．このとき,

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

である．ここで, $f(x)$ は点 $x = a$ で連続だから $h \to 0$ のとき $f(a+h) - f(a) \to 0$ である．従って $k = f(a+h) - f(a)$ とおくと $h \to 0$ のとき $k \to 0$ である．よって

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{k} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = g'(f(a))f'(a)$$

となり定理が示された．　□

【厳密な証明をするには ε–δ 論法が必要】

定理 3.2 の証明は**実は完全ではない．**それは, $h \to 0$ としたときに $k \to 0$ となることは正しいのだが, $h \to 0$ と近づけている**途中**で $k = 0$ にはならない, ということが必要となっているからである．これらの厳密な証明は「ε–δ 論法」というものを使って行うことができる．我々は,「極限」というものを「限りなく近づく」などという「日本語で定義した」が, これでは数学の厳密な議論をするには不十分で, この「極限」を数式きちんと定式化して微積分を論じたものが「ε–δ 論法」というのである．これによれば, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ とは

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad (\text{s.t.}) \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

と表されるのであるが, より詳しく勉強したい人は「杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会」などを参照してほしい．

【合成関数の微分法の覚え方】

合成関数の微分法（定理 3.2）は記号がたくさんあり，よくわからなくなることもある．そこで，これを小学生風に四角「□」を使って簡単に表すと

$$\{f(\square)\}' = f'(\square) \times \square'$$

となる．ここで **f のかっこの中は □ のままで変わっていない**ことに注意しておこう．

また，ライプニッツの記号を使えば，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

と分数っぽく表すこともできる．ただし，これはただの記号遊びなので，本当に $\mathrm{d}y$ が約分されているわけではないことに注意しておこう．

例 3-2　関数 $F(x) = (x^2+3x+1)^5$ の導関数を求めてみよう．まず，この $F(x)$ は $f(x) = x^2+3x+1$ と $g(x) = x^5$ としたとき，合成関数 $(g \circ f)(x)$ であることに注意しよう．このとき

$$F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = 5(x^2+3x+1)^4 \cdot (2x+3).$$

例 3-3　関数 $F(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$ の導関数を求めてみよう．まず，この $F(x)$ は $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ と $g(x) = x^3$ としたとき，合成関数 $(g \circ f)(x)$ であることに注意しよう．このとき

$$F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = 3\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{3x^2(1-x^2)}{(x^2+1)^4}.$$

• 3-3：逆関数

A 上の関数 $f : A \to \mathbb{R}$ を考える．B を f の値域とすると，f というのは $x \in A$ に対して $y = f(x) \in B$ がただひとつに対応している．これの逆の対応を考えよう．つまり，$y \in B$ に対して $x \in A$ を対応させるよう逆向きの対応を考えたい．この対応は逆関数と呼ばれるが，関数の逆関数を考えるときには**関数の定義域と値域をきっちりと考える**必要がある．そこで，次の条件を科そう．

任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して，「$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$」

この条件が満たされているときには，$y = f(x)$ という値から x を対応させることができる．

【定義：逆関数】

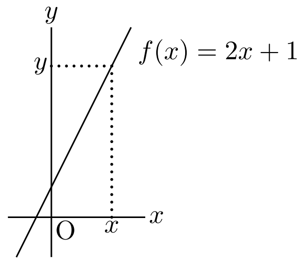
A 上の関数 $f : A \to \mathbb{R}$ は任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して，「$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$」であるとする．関数 $f(x)$ の値域 $B = \{f(x) \mid x \in A\}$ をとる．このとき，$y = f(x) \in B$ に対して $x \in A$ を対応させることによって得られる関数を $f^{-1}(y)$ と表し，関数 $f(x)$ の**逆関数**という．この記号 f^{-1} は「エフ・インバース」と読む．

要するに，$y = f(x)$ という関数が**任意の y を固定したら x がただ一つ決まる**とき，$x = f^{-1}(y)$ と表して，これを $y = f(x)$ の逆関数と呼ぶということである．

例 3-4　定義域を $\mathbb{R}$ とする関数 $y = 2x+1$ という関数を考えると, グラフを見れば分かる通り, 任意の y を固定したら x がただ一つ決まるから $f(x) = 2x+1$ は逆関数をもつ. このとき, $y = 2x+1$ を x について解くと $x = \dfrac{y-1}{2}$ だから, $f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

である.

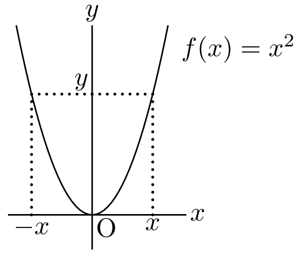


例 3-5　定義域を $\mathbb{R}$ とする関数 $y = x^2$ という関数を考えると, グラフを見れば分かる通り, 任意の y を固定したら x がただ一つ決まらない. 従って, この場合は $f(x) = x^2$ は逆関数をもたない.

また, 定義域を区間 $[0, \infty)$ とするような関数 $y = x^2$ を考えれば, 任意の y を固定したら x がただ一つ決まるから $f(x) = x^2$ は逆関数をもち, $f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(y) = \sqrt{x}$$

である.



同様に, 定義域を区間 $(-\infty, 0]$ とするような関数 $y = x^2$ を考えれば, 任意の y を固定したら x がただ一つ決まるから $f(x) = x^2$ は逆関数をもち, $f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(y) = \sqrt{-x}$$

である.

ちゃんと定義域を決めちゃえば逆関数をもつことがあるんだね.
関数 $f(x)$ の定義域って自由によっていいの?

基本的には, y に対して x が一個だけという条件さえ満たせば
定義域は自由にとっていいよ.
あとで出てくる逆三角関数なんて, ほんとに取り方は人それぞれ.
あと, 実は逆関数 $f^{-1}(y)$ のグラフはもとの $f(x)$ のグラフを直線
$y = x$ で折り返したものになることも抑えておいてね.

ところで, A 上の関数 $y = f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(y)$ がとれたしよう. $f^{-1}(y)$ の定義域を B とする. すると, $b \in B$ に対して, $f^{-1}(b) \in A$ だから, これを $f(f^{-1}(b))$ という値を考えることができる. すると, b に対して $b = f(a)$ となるような $a \in A$ を対応させる関数が逆関数だったから

$$f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$$

となることに注意しよう. 同様にして,

$$f^{-1}(f(a)) = a$$

が成り立つこともわかる.

• 3-4：逆関数の微分法

逆関数の微分法に関して次の定理が成り立つ.

定理 3.3 (逆関数の微分法)**.** 区間 I で微分可能な関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとする. 任意の $x \in I$ で $f'(x) \neq 0$ であれば, $f^{-1}(x)$ は微分可能であり, 等式

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ.

証明. 等式 $f^{-1}(f(x)) = x$ の両辺を x で微分すると, 合成関数の微分法（定理 3.2）より

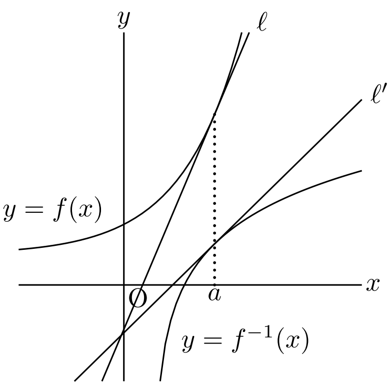
$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

である. 従って $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ となり, 等式が証明された. □

逆関数の微分法の図形的な意味を考えてみよう. まず, **微分係数 $f'(a)$ とは, $y = f(x)$ の $x = a$ での接線の傾き**であった. つまり, $b = f(a)$ とすれば, 逆関数の微分の公式 ① は,

$$「y = f^{-1}(x) \text{ の } x = b \text{ での接線の傾き}」 = \frac{1}{y = f(x) \text{ の } x = a \text{ での接線の傾き}}$$

という式である. 下図は, $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフであり, $x = a$ での接線 ℓ, ℓ' を引いた.



$y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = x$ の直線に関して対称である点に注意すれば, 直線 ℓ と直線 ℓ' も $y = x$ に関して対称だから ℓ' の傾きは ℓ の傾きの逆数になる. 従って等式

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

が成り立つことはとても自然なことなのである.

【$y = x$ に関して対称なふたつの直線】

直線 $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ と $y = a'x + b'$ $(a' \neq)$ を $y = x$ に関して対称な直線とする. このとき, $a' = \dfrac{1}{a}$ である.

証明. 直線 $y = ax + b$ と $y = x$ に関して対称な直線は $x = ay + b$ であるから, これを y に関して解くと

$$x = ay + b \quad \Longleftrightarrow y = \frac{1}{a} - b$$

である. よって $a' = \dfrac{1}{a}$ である. □