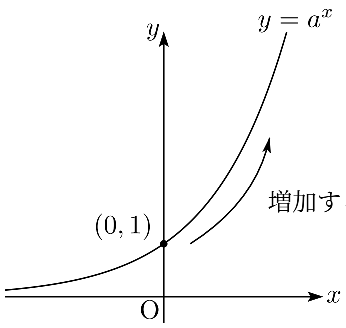
4　指数関数・対数関数の微分法

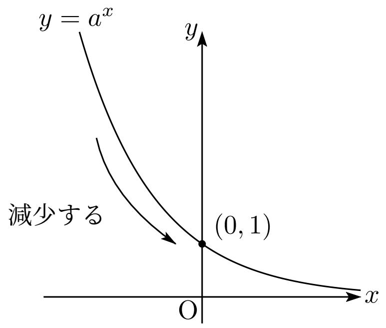
- **4-1：指数関数と対数関数**

高校で学ぶように, $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とするとき, $y = a^x$ で表される関数を**指数関数**といい, a を**底**という. このときの $y = a^x$ のグラフは以下のようになった.

(I) $1 < a$ のパターン

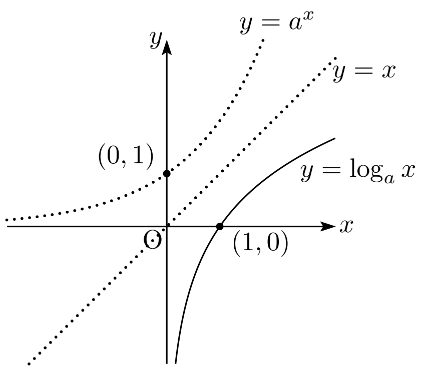


(II) $0 < a < 1$ のパターン

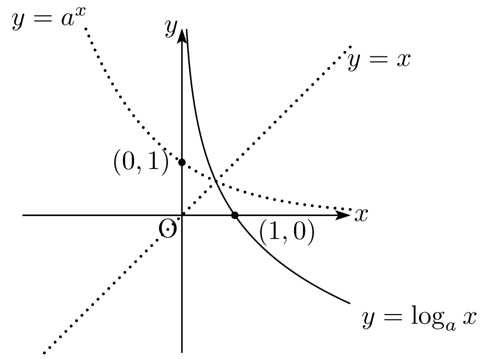


底がいずれの範囲でも, グラフをみれば分かる通り任意の $y > 0$ に対して $y = a^x$ となるような x の値がただ一つ存在するので, 正の実数の範囲で $y = a^x$ の逆関数が存在する. この $y = a^x$ の逆関数を $y = \log_a x$ と書いて, このように表される関数を**対数関数**といい, a を**底**と呼ぶ. 対数関数 $y = \log_a x$ は $y = a^x$ の逆関数なので, そのグラフは $y = a^x$ のグラフと $y = x$ に関して対称である.

(I) $1 < a$ のパターン



(II) $0 < a < 1$ のパターン



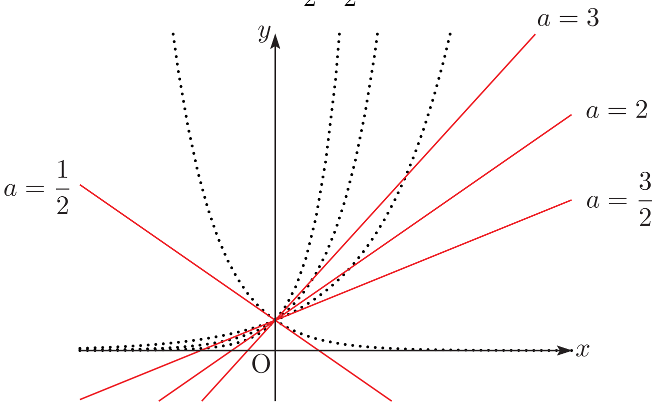
- **4-2：ネイピア数 e**

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 指数関数 $f(x) = a^x$ の $x = 0$ での微分係数を求めてみよう. 定義より

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

この右辺を a の関数だと思うことにしよう. つまり, a をいろいろ変えるごとに $f'(0)$ の値が変わる. 【図 4-1】では, $a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, 3$ のとき $y = a^x$ の点 $x = 0$ での接線を引いた. この直線の傾きが $f'(0)$ である.

【図 4-1: $a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, 3$ のとき】



【定義：ネイピア数】

指数関数 $y = a^x$ の $x = 0$ における接線の傾きが 1 であるとき, すなわち

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

となるような a を文字 $\boldsymbol{e}$ で表し, これを**ネイピア数**と呼ぶ. ネイピア数は $e = 2.718281828\cdots$ であり, これは無理数であることが知られている.

底がネイピア数 e であるような対数 $\log_e x$ を**自然対数**と呼び, 底の e を省略して $\log x$ と書いたり, $\ln x$ と書く.

● 4-3： 指数関数の微分法

定理 4.1 (指数関数の微分法)**.** $a > 0$ かつ $a \neq 1$ となるような定数 a に対して, 指数関数 $y = a^x$ を考える. このとき, 次の式が成り立つ.

(1) $(a^x)' = a^x \log a$.

(2) $(e^x)' = e^x$.

証明. $f(x) = a^x$ とおく. このとき,

$$f'(x) = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

であった. 先に (2) を示そう.

$a = e$ とすれば, ネイピア数の定義より $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ なので $f'(x) = e^x$ が成り立つので (2) が示された.

$a > 0$ のとき, $a = e^{\log a}$ である. なぜならば, $A = e^{\log a}$ とおいて両辺の自然対数をとれば $\log A = \log e^{\log a} = \log a \cdot \log e = \log a$ となるので, 真数を比較することで $a = A$ が成り立つからである. よって,

$$(a^x)' = \{(e^{\log a})^x\}' = (e^{x \log a})'$$

である. 合成関数の微分法（**定理 3.2**）より

$$(e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot (x \log a)' = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a$$

となり, (1) が示された. □

例 4-1　次の関数を微分せよ．

(1) $y = 3^x$　　(2) $y = x^2 e^x$　　(3) $y = e^x - e^{-x}$

解 4-1

(1) $y' = 3^x \log 3$ である．

(2) 積の微分法を用いて

$$y' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x$$

である．

(3) 合成関数の微分法を用いて

$$y' = (e^x)' - (e^{-x})' = e^x - e^{-x} \cdot (-x)' = e^x + e^{-x}$$

である．

【指数関数の定義】

指数関数は $y = a^x$ で表される関数であるが, これを厳密に定義するには「実数の構成」というものを用いる必要がある．$a > 0$ $(a \neq 1)$ という定数 a と有理数 $\frac{m}{n}$ に対して $a^{\frac{m}{n}}$ の定義は高校で与えられた．一方で, 無理数 r に対して a^r はどのように定義すべきであろうか．例えば, $2^{\sqrt{2}}$ はどのように定義されるものであろうか．高校ではこの辺が誤魔化されて**あたかも任意の実数 r に対して a^r が定義されている**ように扱う．指数関数のより厳密な定義は, 例えば「解析入門 上, 松坂和夫（著）, 岩波出版」などにあるのでより勉強したい人は参照してほしい．

• 4-4：対数関数の微分法

定理 4.2 (対数関数の微分法)**.** 区間 I 上で微分可能な関数 $f(x)$ が, 各 $x \in I$ で $f(x) > 0$ を満たすと仮定する．このとき, $y = \log f(x)$ は I 上で微分可能であり, 次の式が成り立つ．

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

特に, $f(x) = x$ $(x > 0)$ ならば,

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

が成り立つ．

証明. まず, $x > 0$ に対して $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ であることを証明しよう．

$y = \log x$ は $f(x) = e^x$ の逆関数であった．つまり, $x = e^y$ である．$f'(x) = e^x \neq 0$ なので, 逆関数の微分法（**定理 3.3**）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\log x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}(e^y)}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

であるから示したい等式が成り立つ．

次に $(\log(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ を証明しよう．$g(x) = \log x$ とおくと,

$$\log f(x) = g(f(x))$$

とかけるから, $g(x)$ と $f(x)$ の合成関数である．よって合成関数の微分法（**定理 3.2**）によって,

$$(\log(f(x)))' = g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

であることがわかった．　□

- **4-5 : 対数微分法**

関数 $y = f(x)$ を微分するとき, $f(x)$ の形が複雑なときは**両辺の自然対数をとり, 対数関数の微分法を用いる**という手法をとることがある．具体的には以下の手順で $y = f(x)$ の導関数をもとめるのであるが, これを**対数微分法**という.

(I) まず, $y = f(x)$ が, 定義域内の全ての x に対して $f(x) > 0$ であることを確認する.

(II) 両辺の自然対数をとり, $\log y = \log f(x)$ という式をつくる.

(III) これの両辺を x で微分する．このとき

$$(\log y)' = \frac{y'}{y}, \quad (\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

なので,

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad y' = y \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

となる.

これを応用することで, 任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ に対する x^r の導関数を求めることができる.

定理 4.3 (x^r の微分法)**.** $r \in \mathbb{R}$, $x > 0$ とする．このとき,

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

が成り立つ.

証明. $y = x^r$ とおき, これの両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log x^r = r \log x$$

となる．これの両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = r \cdot \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad y' = r \cdot \frac{1}{x} \cdot y = rx^{-1} \cdot x^r = rx^{r-1}$$

となる. □

この定理を使えば, 多くの関数を微分することができるようになる.

例 4-2　関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+3})$ を微分してみよう.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x+\sqrt{x^2+3})'}{x+\sqrt{x^2+3}} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+3}} \cdot \{x + (x^2+3)^{\frac{1}{2}}\}' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+3}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+3)'\right\} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+3}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right\} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+3}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}
\end{aligned}$$

対数微分法の応用問題を解いてみよう．

例 4-3　関数 $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ を微分してみよう．$x > 0$ なので $x^x > 0$ である．両辺の自然対数をとって x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = (\log x^x)' = (x \log x)' = x' \log x + x(\log x)' = 1 + \log x$$

である．従って $y' = y(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$ である．

• **4-6：ネイピア数の再考**

ネイピア数の定義を思い出すと，

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

となるような a のことであった．

ねぇねぇ，高校で習った e の定義と違うような気がするんだけど....
高校で習ったのって嘘の定義だったの？

高校ではネイピア数は

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

というふうに習ったかもね．でも大丈夫，おんなじものだよ!

まず，$f(x) = \log x$ とおこう．このとき，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ なので，$f'(1) = 1$ である．つまり，微分の定義によれば

$$1 = f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h}$$

が成り立つ．今，$x = \dfrac{1}{h}$ とおくと，$h \to 0$ となることと $x \to \infty$ となることは同値であり，

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

これにより

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

となることがわかった．以上の考察によって，高校で学んだ e の定義と同じであることがわかる．