

## 5 三角関数・逆三角関数の微分法

### ● 5-1：三角関数の極限の公式

原点中心で半径が1の円を**単位円**と呼ぶ。単位円上の点Pをとり、 $x$ 軸正の方向と線分OPのなす角を $\theta$ としよう。この $\theta$ を**中心角**という。

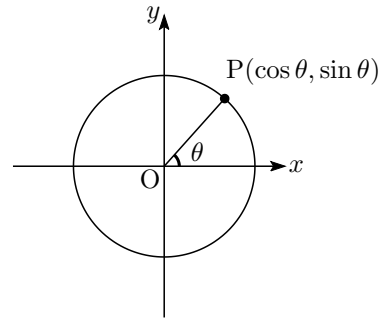
点Pの $x$ 座標と $y$ 座標は $\theta$ によって決まるので、これらは $\theta$ の関数である。そこで、点Pの $y$ 座標を $\sin \theta$ と書いて**正弦**といい、点Pの $x$ 座標を $\cos \theta$ と書いて**余弦**という。また、直線OPの傾きも $\theta$ の関数であるが、これを $\tan \theta$ と書いて**正接**という。点Pは単位円上を動くので、どんな $\theta$ に対しても

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

が成り立つ。また、直線OPの傾きが $\tan \theta$ なので

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

が成り立つ。



**定理 5.1** (三角関数の極限). 次の等式が成り立つ。(特に(1)は重要な極限の公式である.)

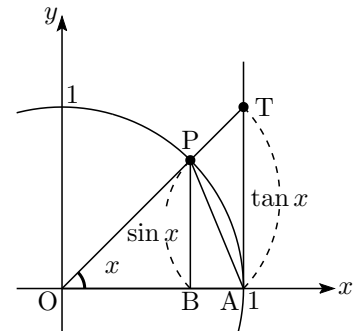
$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

**証明.** (ここの(1)の証明は数学的には正しくはない。直感的な理解として役立てよ.)

(1) まず、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のときを考える。単位円上の点Pを中心角が $x$ となるようにとり、点Pから $x$ 軸に下ろした垂線をBとする。また、 $A(1,0)$ における円Oとの接線と、線分OPを延長した直線とが交わる点をTとおく。このとき、右の図から明らかに

$$(\triangle OAP \text{ の面積}) < (\text{扇型 OAP の面積}) < (\triangle OAT \text{ の面積}) \quad *1 \quad \text{..... ①}$$

である。それぞれの面積を求めよう。



#### ● $\triangle OAP$ の面積

点Pは単位円周上にあり、中心角は $x$ だから点Pの $y$ 座標は $\sin x$ である。つまり、 $BP = \sin x$ なので

$$(\triangle OAP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} OA \cdot BP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x.$$

#### ● 扇型 OAP の面積

扇型OAPは中心角が $x$ で半径が1なので

$$(\text{扇型 OAP の面積}) = \frac{1}{2} \cdot (\text{半径}) \cdot (\text{中心角}) = \frac{1}{2} OA \cdot x = \frac{1}{2} x.$$

#### ● $\triangle OAT$ の面積

直線OTの傾きは $\tan x$ なので $\tan x = \frac{AT}{OA} = AT$ であることに注意しよう。よって、

$$(\triangle OAT \text{ の面積}) = \frac{1}{2} OA \cdot AT = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x.$$

\*1 この証明はいわゆる循環論法である。扇形の面積を定義するのに、 $y = \sin x$ の微分が必要だからである。

従って、不等式 ① より  $\sin x < x < \tan x$  である。辺々を  $\sin x$  で割って、 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  を用いれば不等式

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \implies \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

を得る。ここで  $x \rightarrow 0+$  とすれば  $\cos x \rightarrow 1$  なのではさみうりの原理より

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

が成り立つ。更に、 $\cos(-x) = \cos x$ ,  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$  なので、 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  のときも

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

が成り立つ。ここで  $x \rightarrow 0-$  とすれば  $\cos x \rightarrow 1$  なのではさみうりの原理より

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

が成り立つ。以上で示したい極限の式が成り立つことが（直感的に）示された。

(2)  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

となるので (2) が成り立つ。

(3) 与えられた式を変形して

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

であるが、 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となるので (3) が成り立つ。 □

### 【三角関数の極限公式】

**定理 5.1** の (1) の極限公式  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  は非常に重要な式で、これを用いて三角関数を含むような極限の計算を行うことは多い。勘違いされがちだが、**sin の中身と分母が一緒でないと 1 に収束しない**。これも小学生風に「□」を使って書くと

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

なので、この極限公式を使うときは sin の中身と分母が同じことを必ず確認しよう。

**例 5-1** 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$  を求めてみよう。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3$$

であり、 $x \rightarrow 0$  のとき  $3x \rightarrow 0$  であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

となる。

● 5-2 : 三角関数の微分法

**定理 5.2** (三角関数の微分法). 次の式が成り立つ.

$$(1) (\sin x)' = \cos x \qquad (2) (\cos x)' = -\sin x \qquad (3) (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

**証明.** (1) 導関数の定義と加法定理を用いると

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) \end{aligned}$$

と変形できる. ここで**定理 5.1** (3) を用いれば

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{1 - \cos h}{h^2} \right) \cdot h = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

なので

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) = (\cos x) \cdot 1 + (\sin x) \cdot 0 = \cos x$$

が成り立つ.

(2)  $\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$  なので, 合成関数の微分法 (**定理 3-2**) より

$$(\cos x)' = \left\{ \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right\}' = \left\{ \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \cdot \left( x + \frac{\pi}{2} \right)' = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x$$

となるので (2) が成り立つ.

(3)  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  なので, 商の微分法 (**定理 3-1**) より

$$(\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x) \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

となるので (3) が成り立つ. □

● 5-3 : 逆三角関数

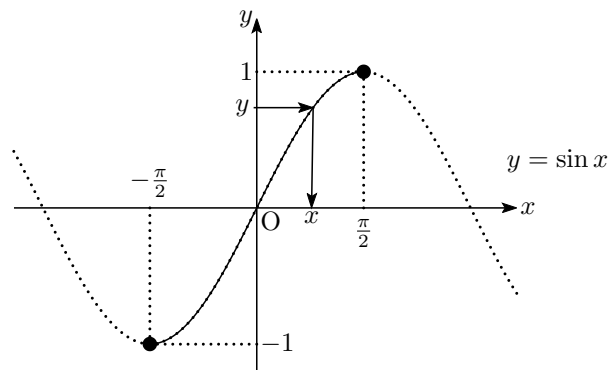
三角関数の逆関数について考える. ただし, もとの三角関数の定義域は以下に述べるような最もよく用いられているものを採用する.

(I) : 逆正弦関数  $y = \sin^{-1}(x)$

正弦関数  $y = \sin x$  は区間  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  に定義域を制限すると, **任意の  $y$  を固定するとただ一つの  $x$  をみつけることができる.** 従って, この範囲で  $y = \sin x$  の逆関数を考えることができる. これを

$$x = \sin^{-1} y \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

で表し, **逆正弦関数** という. これは, 値  $y$  に対して,  $\sin x = y$  になる角度  $x$  を返す関数である. 記号  $\sin^{-1}$  は「サインインバース」と読み, テキストによっては  $\text{Sin}^{-1}$ ,  $\text{arcsin}$ ,  $\text{Arcsin}$  などと表される場合もある.

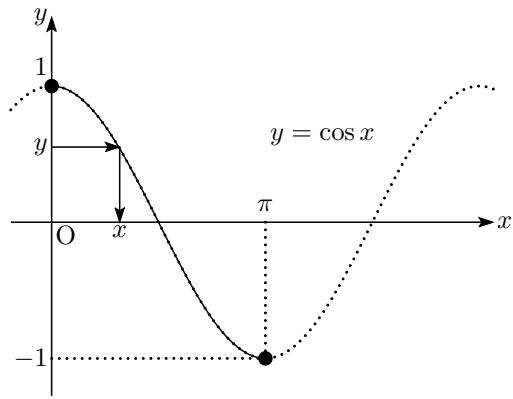


(II)：逆余弦関数  $y = \cos^{-1}(x)$

余弦関数  $y = \cos x$  は区間  $[0, \pi]$  に定義域を制限すると、**任意の  $y$  を固定するとただ一つの  $x$  をみつけることができる。** 従って、この範囲で  $y = \cos x$  の逆関数を考えることができる。これを

$$x = \cos^{-1} y \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

で表し、**逆余弦関数**という。これは、値  $y$  に対して、 $\cos x = y$  になる角度  $x$  を返す関数である。記号  $\cos^{-1}$  は「**コサインインバース**」と読み、テキストによっては  $\text{Cos}^{-1}$ ,  $\arccos$ ,  $\text{Arccos}$  などと表される場合もある。

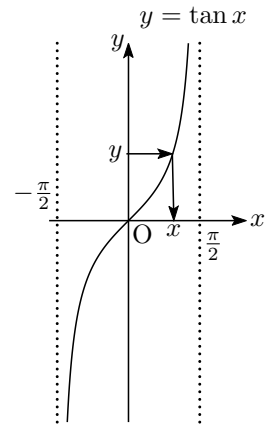


(III)：逆正接関数  $y = \tan^{-1}(x)$

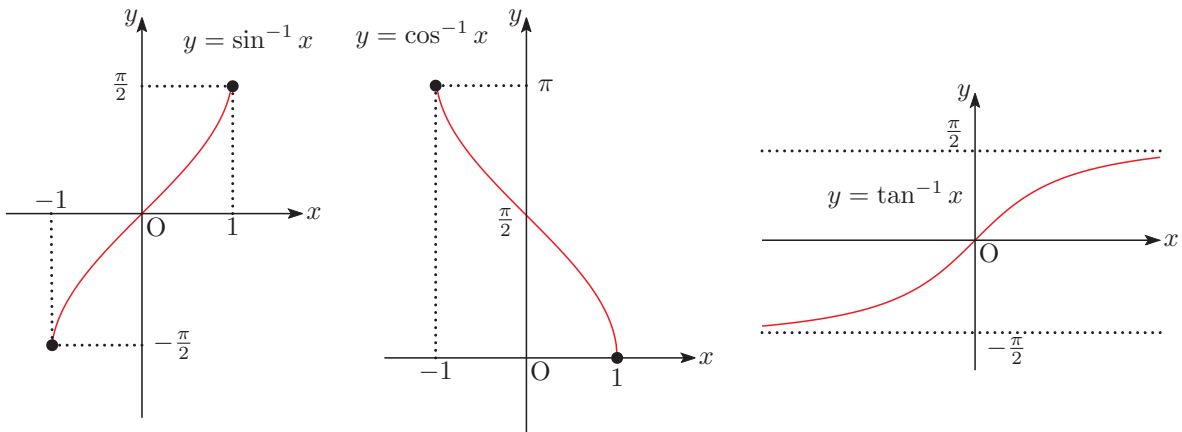
正接関数  $y = \tan x$  は区間  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  に定義域を制限すると、**任意の  $y$  を固定するとただ一つの  $x$  をみつけることができる。** 従って、この範囲で  $y = \tan x$  の逆関数を考えることができる。これを

$$x = \tan^{-1} y \quad (y \in \mathbb{R})$$

で表し、**逆正接関数**という。これは、値  $y$  に対して、 $\tan x = y$  になる角度  $x$  を返す関数である。記号  $\tan^{-1}$  は「**タンジェントインバース**」と読み、テキストによっては  $\text{Tan}^{-1}$ ,  $\arctan$ ,  $\text{Arctan}$  などと表される場合もある。



逆関数  $y = f^{-1}(x)$  のグラフは、元の関数  $y = f(x)$  のグラフを  $y = x$  に関して対称になるので、逆三角関数のグラフは次のようになる。



**例 5-2**  $\cos^{-1} \frac{1}{2}$  の値を求めてみよう。逆関数の定義から

$$x = \cos^{-1} \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} = \cos x$$

ということである。今、 $x$  の範囲は  $0 \leq x \leq \pi$  なので  $x = \frac{\pi}{3}$  となる。

## ● 5-4 : 逆三角関数の微分法

最後に、逆三角関数の導関数がどうなるかを調べよう。



逆三角関数は三角関数の「逆関数」だったよね。  
だから、導関数は逆関数の微分法をつかって簡単に求められるよ！

逆関数の微分法ってなんだっけ...  
エフィンパース、ダッシュ、エフ.....?? あの式複雑すぎだよ

こういうときは「ダッシュ」の方じゃなくて、dの方を使った表し方の方が覚えやすいよ。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

って書きゃえば、分数みたいな形で間違えにくいんだ！



**定理 5.3** (逆三角関数の微分法). 次の式が成り立つ.

$$(1) (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2) (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3) (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

**証明.** (1)  $y = \sin x$  とおくと,  $x = \sin^{-1} y$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ) である. 逆関数の微分法 (**定理 3-3**) と三角関数の微分法 (**定理 5.2**) より

$$(\sin^{-1} y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

だから (1) が成り立つ.

(2)  $y = \cos x$  とおくと,  $x = \cos^{-1} y$  ( $0 < x < \pi$ ) である. 逆関数の微分法 (**定理 3-3**) と三角関数の微分法 (**定理 5.2**) より

$$(\cos^{-1} y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

だから (2) が成り立つ.

(3)  $y = \tan x$  とおくと,  $x = \tan^{-1} y$  である. 逆関数の微分法 (**定理 3-3**) と三角関数の微分法 (**定理 5.2**) より

$$(\tan^{-1} y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

だから (3) が成り立つ. □

**例 5-3**  $y = \cos^{-1} \sqrt{x}$  の導関数を求めよう. これは  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \cos^{-1} x$  とおくと,  $y = g(f(x))$  という合成関数である. 従って,

$$y' = g'(f(x))f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$$

となる.