6　関数の変化と微分

• **6-1 ： 極値**

平均値の定理は, 微分可能な関数の様子を調べる上で基本となるものである. そのために, 次の事実を使うので紹介しよう.

定理 6.1 (最大値 · 最小値の存在)**.** $a, b \in \mathbb{R}$ が $a < b$ を満たしているとする. このとき, 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $y = f(x)$ には, $c \in [a, b]$ で $f(c)$ が最大値となるものがとれる. また, $d \in [a, b]$ で $f(d)$ が最小値となるものがとれる.

この定理は, 区間 $[a, b]$ のどこかで関数 $y = f(x)$ が最大, 最小になるようなところがあることを保証しているんだよ!

c とか d って具体的にどこにあるかわかんないの? 端っこにあるとか, 真ん中ら辺にあるとか.....

「どこに」あるかまでは言及していないんだ.
絶対どっかにある!って言ってるだけだけど, この定理のように, 数学では「存在を保証する」定理はとても重要なんだよ.

証明は「実数の連続性」を用いて示す. これは少し難しいので割愛するが, 気になる人は「解析入門 上, 松坂和夫（著）, 岩波出版, pp. 114」に掲載されているのでそちらを参照してほしい.

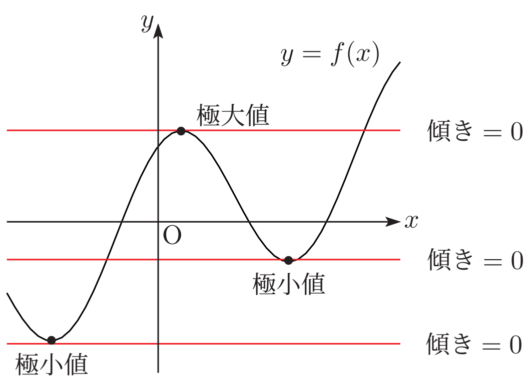
さて, もうひとつ用語を用意する.

【定義：極値】
関数 $y = f(x)$ は点 $x = a$ とその近くで定義されているとする.

- $x = a$ の十分近い任意の x' に対して, $f(x') < f(a)$ となるとき, $f(a)$ を $y = f(x)$ の**極大値**という.
- $x = a$ の十分近い任意の x' に対して, $f(x') > f(a)$ となるとき, $f(a)$ を $y = f(x)$ の**極小値**という.

極大値と極小値を合わせて**極値**という. 関数の最大値や最小値はとくに極値である.

極値のイメージを右の図に示した. 関数 $y = f(x)$ の極大値や極小値は一つとは限らず複数ある場合がある. 極大とは, グラフで言えば**「上昇から下降に転じるところ」**であり, 極小とは**「下降から上昇に転じるところ」**というイメージをつけるとよい. また, 右の図をみれば分かる通り, 極値における接線の傾きは 0 になることがわかる. このことを次の定理で示そう.



定理 6.2 (極値での接線の傾き)**.** 区間 $[a, b]$ 上で定義された関数 $y = f(x)$ は, 開区間 (a, b) で微分可能であるとする. 関数 $y = f(x)$ が $c \in (a, b)$ で極値をとるならば $f'(c) = 0$ である.

証明. 定義域内の点 $x = c$ で極大値をとるとしよう. $h > 0$ を十分小さい正の数とする. このとき,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

なので $h \to 0+$ とすれば $f'(c) \leq 0$ である. また, $h < 0$ を十分 0 に近い負の数とすると

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

なので $h \to 0-$ とすれば $f'(c) \geq 0$ である. 以上で $0 \leq f'(c) \leq 0$ なので $f'(c) = 0$ であることが従う.
　同様に定義域内の点 $x = c$ で極小値をとるときも $f'(c) = 0$ であることが証明できる. □

【"同様に"という言葉に敏感になろう】

　定理 6.2 の証明で, 「**同様に**定義域内の点 $x = c$ で極小値をとろときも $f'(c) = 0$ であることが証明できる.」とかいている. このように, これまで行ってきた議論と全く同じ方法で証明や解答ができるとき, 「**同様に...**」とかいて証明や解答を省略することがしばしばある. これは**続きは読者に委ねる**という意味であり, ここで大切なのは**同様に証明（解答）できることは自分で確かめてね**という意味が込められている.
　つまり, テキストや論文などで「同様に...」と出てきたときには**本当に同様にできるかを自分で確認する**ことが要求されているのである. 自分で確認もせずにゼミなどで「**同様に....**」と発表して担当教員に指摘されて答えることができない, などということが起こらないようにしよう.

【$f'(c) = 0$ だからといって, 点 c で極値をとるとは限らない. 】

　定理 6.2 の主張を簡潔に書くと,

$$x = c \text{ で } y = f(x) \text{ が極値をとる} \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = 0$$

ということであるが, これの逆の命題

$$f'(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = c \text{ で } y = f(x) \text{ が極値をとる}$$

は**偽**である. 反例として $y = x^3$ は $x = 0$ で $f'(0) = 0$ であるが, $x = 0$ で極値をとらない.

• 6-2 : ロルの定理と平均値の定理

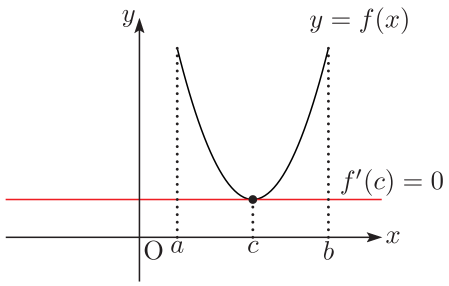
　平均値の定理を証明することがこの節での目標である. まずは**ロルの定理**と呼ばれる次の主張を証明しよう.

定理 6.3 (ロルの定理)**.** 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続な関数 $y = f(x)$ は, 開区間 (a, b) で微分可能であるとする. 関数 $y = f(x)$ が $f(a) = f(b)$ を満たすならば, $c \in (a, b)$ で $f'(c) = 0$ となるものが存在する.

証明. まず, $f(x)$ が定数関数とする. つまり, 任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$f(x) = f(a) = f(b)$$

のときは, 任意の $c \in (a, b)$ に対して $f'(c) = 0$ となるので定の主張は成り立つ.
　以下, $f(x)$ が定数関数ではないと仮定しよう. このとき, **定理 6.1** によって $y = f(x)$ は $x = c_1$ で最大値 $f(c_1)$ をもち, $x = c_2$ で最小値 $f(c_2)$ をとる.



さて, $f(x)$ は定数関数ではないから $c_1 \neq c_2$ であり, かつ $f(c_1) \neq f(c_2)$ である. よって, c_1 または c_2 は a でも b でもない. a でも b でもない方を c とおくと, $c \in (a,b)$ であり**定理 6.2** より $f'(c) = 0$ である. □

ロルの定理を使って, 微分法で重要な定理である**平均理の定理**が証明できる.

定理 6.4 (平均値の定理)**.** 区間 $[a,b]$ 上で定義された連続な関数 $y = f(x)$ は, 開区間 (a,b) で微分可能であるとする. このとき,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすような $c \in (a,b)$ が存在する.

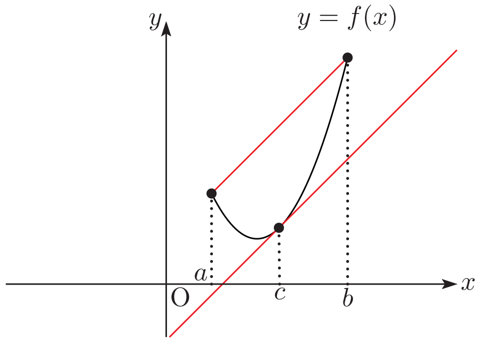
証明. まず, 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

と定義する. すると,

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$$



なので $g(a) = g(b)$ である. ここで, $g(x)$ に対してロルの定理（**定理 6.3**）を適用すると $g'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ が存在する. この c に関して

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

だから, 平均値の定理の主張が示された. □

• 6-3 : 関数の増減

関数の増減とその導関数の関係性について考察しよう. まず, 関数の増減に関する用語を定義する.

【定義：単調性】

関数 $y = f(x)$ に対して,

- $f(x)$ が区間 (a,b) で**単調増加**とは, $s,t \in (a,b)$ で $s < t$ ならば $f(s) < f(t)$ を満たすときをいう.
- $f(x)$ が区間 (a,b) で**単調減少**とは, $s,t \in (a,b)$ で $s < t$ ならば $f(s) > f(t)$ を満たすときをいう.

定理 6.5 (関数の増減)**.** 区間 $[a,b]$ 上で定義された連続な関数 $y = f(x)$ は, 開区間 (a,b) で微分可能であるとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 任意の $c \in (a,b)$ で $f'(c) > 0$ ならば, $f(x)$ は単調増加である.
(2) 任意の $c \in (a,b)$ で $f'(c) < 0$ ならば, $f(x)$ は単調減少である.
(3) 任意の $c \in (a,b)$ で $f'(c) = 0$ ならば, $f(x)$ は定数関数である.

証明. (1) $s < t$ を定義域内からとり, 任意の $c \in (a,b)$ で $f'(c) > 0$ を仮定する. 平均値の定理（**定理 6.4**）よりある $c' \in (s,t)$ で

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(c') > 0$$

とできるが, $t - s > 0$ なので $f(t) > f(s)$ となる. よって $f(x)$ は単調増加である. (2), (3) も同様の議論でに示せる. □

標語にしておけば, **「$f(x)$ の増減を調べるには, $f'(x)$ の符号を調べれば良い」**ということになる.

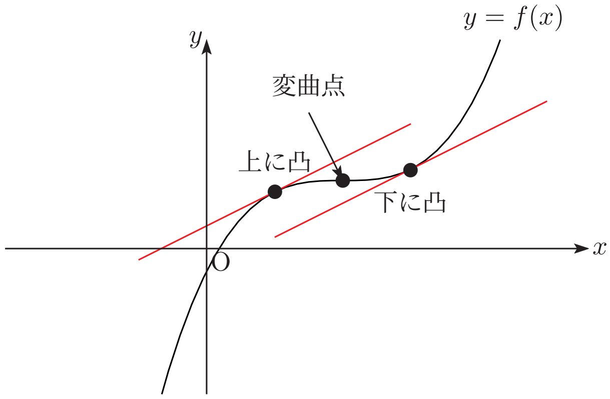
- **6-4: 関数のグラフの凹凸性**

平均値の定理によって, 関数 $f(x)$ の増減を調べるときには, $f'(x)$ の符号を調べれば良いことが明らかになった（**定理 6.5**）. これを用いれば, 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描くことができる.

ところで, $x = a$ で微分可能な関数 $y = f(x)$ のグラフ C の概形についてもう少し考察してみる. 点 $\mathrm{P}(a, f(a))$ での接線は

$$\ell: \quad y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

で表される直線である. 点 P の近くで, グラフ C が直線 ℓ よりも上にあるとき, $x = a$ で**下に凸**という. 同様に点 P の近くで, グラフ C が直線 ℓ よりも下にあるとき, $x = a$ で**上に凸**という. 点 P の周りでグラフ C が「上に凸から下に凸」もしくは「下に凸から上に凸」に変化するとき, 点 P を**変曲点**という.



2 回微分可能な関数のグラフの凹凸に関しては次の定理が成り立つ.

定理 6.6 (関数の凹凸)**.** 区間 $[a,b]$ 上で定義された関数 $y = f(x)$ は, 開区間 $x = c$ で 2 回微分可能であるとする. 関数 $f''(x)$ が $x = c$ で連続であれば次が成り立つ.

(1) $f''(c) > 0$ ならば, $f(x)$ は $x = c$ で下に凸である.
(2) $f''(c) < 0$ ならば, $f(x)$ は $x = c$ で上に凸である.
(3) $f''(c) = 0$ であり, $x = c$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば, 点 $(a, f(a))$ は曲線 $y = f(x)$ の変曲点である.

証明. (1) 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x) - \{f'(c)(x-c) + f(c)\}$$

と定める. 示すことは, $x \neq c$ であるような $x = c$ の周辺で $g(x) > 0$ となることである. このとき, $g(x)$ の導関数は

$$g'(x) = f'(x) - f'(c), \quad g''(x) = f''(x)$$

だから $g'(x)$ および $g''(x)$ は $x=c$ で連続である．また, 仮定より $f''(c)>0$ なので, **定理 6.5** より $x=c$ の周辺で $f'(x)$ は単調増加である．従って, $x=c$ の周辺で $g(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	$x<c$	$x=c$	$x>c$
$g''(x)$	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$-, \nearrow$	0	$+, \nearrow$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表により, $x \neq c$ となるような $x=c$ の周辺で $g(x)>0$ であることがわかったので, 曲線 $y=f(x)$ は $x=c$ で下に凸である．同様にして, (2) と (3) も証明できる．　$\square$

【関数のグラフ化】

定理 6.5 と**定理 6.6** によって, 関数の増減やその凸性についてその情報を, $f'(x)$ や $f''(x)$ の符号をみることで分かるようになった．そこで, 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描くためのステップを示そう．

- 関数の定義域を確認し, 関数 $y=f(x)$ に対称性や周期性などの特徴がないかを調べる．
- $f'(x)$ や $f''(x)$ の符号を調べて増減表をかく．
- 極値や変曲点などの特徴的な点について調べる．
- 関数が定義されていない点の布巾や, $x\to\pm\infty$ での $y=f(x)$ の振る舞いをみて漸近線を調べる．

例 6-1　関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ の極値やグラフの凹凸について調べてその概形を描こう．この関数は任意の実数 x に対して定義される．更に, $f(x)=f(-x)$ なのでこのグラフは「y 軸対称」である．$f(x)$ の導関数は

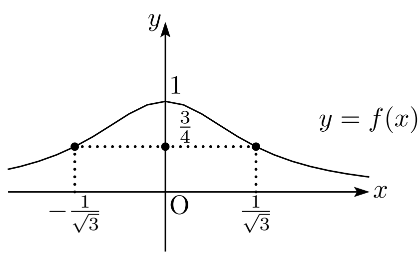
$$f'(x)=\left\{\frac{1}{x^2+1}\right\}'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

なので, $f'(x)=0$ となるのは $x=0$ である．また, $f(x)$ の 2 階導関数を計算すると

$$f''(x)=\left\{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right\}'=\frac{-2(x^2+1)^2-\{2x\cdot(x^2+1)\cdot 2x\}}{(x^2+1)^4}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

なので, $f''(x)=0$ となるのは $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．よって, 関数 $y=f(x)$ の増減表は以下のようになる．

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$		0		$-$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\nearrow$	1 （極大値）	$\searrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\searrow$



ここで, $x\to\pm\infty$ での $y=f(x)$ の振る舞いをみてみると,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

なので x 軸が漸近線である．よってグラフは右の図のようになる．

• 6-5: ロピタルの定理

一般に, $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ で $A \neq 0$ ならば $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{B}{A}$ であるが, $A = 0$ かつ $B = 0$ の場合の極限 $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}$ はいろいろな場合が生じてしまう．このような場合を $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **の不定形**という．このような不定形の極限の計算に次の**ロピタルの定理**は有力である．

定理 6.7 (ロピタルの定理)**.** 関数 $f(x)$, $g(x)$ は $x = a$ の近くで微分可能な関数とする．定義域の任意の x に対して $g(x) \neq 0$ かつ $g'(x) \neq 0$ と仮定する．このとき, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ であって, 極限 $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．

証明. $f(a) = g(a) = 0$ なので, 平均値の定理（**定理 6.4**）を用いると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となるような $a < c < x$ が存在する．$x \to a$ のとき, $c \to a$ なので

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となり主張が成り立つ．□

【ロピタルの定理は色んなシチュエーションで成り立つ．】

ロピタルの定理（**定理 6.7**）は, $a \to \pm\infty$ の場合や $x \to a + 0$, $x \to a - 0$, $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形の場合にも成り立つ．

例 6-2 $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求める．$x \to 0$ のとき, $x^3 \to 0$ かつ $x - \sin x \to 0$ なのでロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

である．$x \to 0$ のとき, $3x^2 \to 0$, $1 - \cos x \to 0$ なので再びロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

例 6-3 $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ を求める．$x \to \infty$ のとき, $\sqrt{x} \to \infty$ かつ $\log x \to \infty$ なのでロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

【関数の増大度】

$x \to \infty$ のとき関数 $f(x)$ は $f(x) \to \infty$ とする．このとき, $f(x) \to \infty$ となる速さを**関数の増大度**という．ロピタルの定理（**定理 6.7**）を用いることで, 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して次の極限の式を示すことができる．

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^n} = 0$$

これは, 関数の増大度が指数関数, 多項式, 対数関数の順で大きいということを表している．