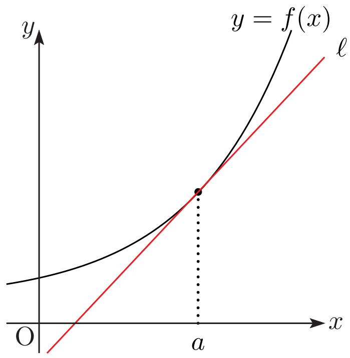
7　関数の多項式近似

関数の中で最も単純な関数はなんだろうか．答える人によってその回答は異なるかもしれないが，「多項式」が扱いやすいのではないかと考えるのは自然である．ここでは，様々な関数を多項式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ の形に近似することを考えていこう．

- **7-1 ： 曲線の n 次近似**

微分可能な曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ によって定義されていた．



$x = a$ の周辺では曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ は非常に似ている．つまり，$x \fallingdotseq a$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f^{(1)}(a)(x - a)$$

となる．これの右辺は 1 次関数を用いているから，$y = f(x)$ の**1 次近似**と呼ぶ．これの近似精度を上げよう．$x \fallingdotseq a$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a) + A(x - a)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となっているとする．定数 A の値を求めてみよう．① の両辺を x で微分すると

$$f'(x) \fallingdotseq f'(a) + 2A(x - a)$$

となる．これの両辺をもう一度 x で微分すると

$$f''(x) \fallingdotseq 2A$$

であるが，これを一致させるために $x = a$ を代入して $A = \dfrac{f''(a)}{2}$ を得る．こうして $x \fallingdotseq a$ のとき

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f^{(1)}(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2$$

となる．これの右辺は 2 次関数を用いているから，$y = f(x)$ の**2 次近似**と呼ぶ．次に $x \fallingdotseq a$ のときの $f(x)$ の 3 次近似を求めよう．

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + A(x - 3)^3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となっているとする．定数 A の値を求めるために ② の両辺を x で微分すると

$$f'(x) \fallingdotseq f'(a) + f^{(2)}(a)(x - a) + 3A(x - a)^2$$

となる．これの両辺をもう一度 x で微分して

$$f''(x) \fallingdotseq f^{(2)}(a) + 6A(x - a)$$

もう一度両辺を x で微分すれば
$$f^{(3)}(x) \fallingdotseq 6A$$
であるが, これを一致させるために $x=a$ を代入して $A=\dfrac{f^{(3)}(a)}{6}$ を得る. こうして $x \fallingdotseq a$ のとき
$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-3)^3$$
となる. これの右辺は 3 次関数を用いているから, $y=f(x)$ の**3 次近似**と呼ぶ.

以下, この操作を繰り返して近似精度をあげることで曲線 $y=f(x)$ の n 次近似を構成できる.

• 7-2： Taylor の定理

定理 7.1 (Taylor の定理)**.** 区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数 $y=f(x)$ は, 開区間 (a,b) で $n+1$ 回微分可能であるとする. このとき, ある $c\in(a,b)$ が存在して, 次の式が成り立つ.
$$f(b)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+R_{n+1}(c)$$
ただし, $R_{n+1}(c)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ であり, これを**Lagrange の剰余項**という.

証明. R を未知数として
$$f(b)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{R}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$
とおく. これから示すことは, ある $c\in(a,b)$ が存在して $R=f^{(n+1)}(c)$ となることである. そこで, 関数 $F(x)$ を
$$F(x)=f(b)-\left\{f(x)+\frac{f^{(1)}(x)}{1!}(b-x)+\frac{f^{(2)}(x)}{2!}(b-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n+\frac{R}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}\right\}$$
で定義すれば, $F(a)=0$ かつ $F(b)=0$ である. 従ってロルの定理（**定理 6.3**）によってある $c\in(a,b)$ が存在して $F'(c)=0$ とできる.

ところで,
$$\begin{aligned}F'(x)&=-f^{(1)}(x)-\frac{f^{(2)}(x)}{1!}(b-x)+\frac{f^{(1)}(x)}{1!}-\frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b-x)^2+\frac{f^{(2)}(x)}{1!}(b-x)-\cdots\\&=-(b-x)^n\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}+\frac{R}{n!}(b-x)^n\end{aligned}$$
だから
$$0=F'(c)=-(b-c)^n\frac{f^{n+1}(c)}{n!}+\frac{R}{n!}(b-c)^n=\frac{(b-c)^n}{n!}\cdot(R-f^{(n+1)}(c))$$
ここで $\dfrac{(b-c)^n}{n!}\neq 0$ なので $R=f^{(n+1)}(c)$ が従う. 以上で Taylor の定理が成り立つ. □

ところで, Taylor の定理（**定理 7.1** における b に x を代入して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(c)=0$ が成り立つならば次が成り立つ.

定理 7.2 (Taylor 展開)**.** 点 $x=a$ の近くで定義された連続関数 $y=f(x)$ は, $x=a$ で無限回微分可能であって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(c)=0$ が成り立つとする. このとき, $y=f(x)$ は次のように表すことができる.
$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

- **7-3： Maclaurin 展開**

Taylor 展開（**定理 7.2**）において, $a=0$ の場合を考えたものが**Maclaurin 展開**と呼ばれるものである.

定理 7.3 (Maclautin 展開)**.** 点 $x=0$ の近くで定義された連続関数 $y=f(x)$ は, $x=0$ で無限回微分可能であって, $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(c)=0$ が成り立つとする. このとき, $y=f(x)$ は次のように表すことができる.

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \quad \left(=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)$$

例 7-1　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=e^x$ の Maclaurin 展開を求めよう.

(1) $f(x)=\sin x$ の Maclaurin 展開を計算する. その為に $f(x)=\sin x$ の高階導関数に $x=0$ を代入したものを計算する.

- $f(0)=\sin 0=0$,
- $f^{(1)}(0)=\cos 0=1$,
- $f^{(2)}(0)=-\sin 0=0$,
- $f^{(3)}(0)=-\cos 0=-1$,
- $\cdots\cdots$,
- $f^{(2n)}(0)=(-1)^n\sin 0=0$,
- $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\cos 0=(-1)^n$.

以上より

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

(2) $f(x)=\cos x$ の Maclaurin 展開を計算する. その為に $f(x)=\cos x$ の高階導関数に $x=0$ を代入したものを計算する.

- $f^{(0)}(0)=\cos 0=1$,
- $f^{(1)}(0)=-\sin 0=0$,
- $f^{(2)}(0)=-\cos 0=-1$,
- $f^{(3)}(0)=-\sin 0=0$,
- $\cdots\cdots$,
- $f^{(2n)}(0)=(-1)^n\cos 0=(-1)^n$,
- $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\sin 0=0$.

以上より

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

(3) $f(x)=e^x$ の Maclaurin 展開を計算する. $f(x)=e^x$ の高階導関数は e^x なので任意の $n=1,2,\ldots$ に対して $e^0=1$ だから

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

これらの Maclaurin 展開は, **剰余項が収束するような x でしか成り立たない.** 三角関数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ や指数関数 $y=e^x$ は任意の実数 x に対して剰余項が 0 に収束するのでいつでも Maclaurin 展開可能であるが, 他の関数を扱う場合は注意しなければならい.

- **7-4： 余談：複素関数**

　複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，複素数 $f(z)$ を対応させる関数を**複素関数**という．複素数 z に対して e^z は次のように定義する．

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n.$$

このように定義する正当性は様々あるが，$z = x$ が実数のときは先の Maclaurin 展開より通常の指数関数 e^x となる．さて，$z = i\theta$ を代入すれば

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{1}{1!}(i\theta) + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1!}i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

となることがわかる．この等式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を**Euler の公式**と呼ぶ．$\theta = \pi$ を代入すれば $e^{i\pi} + 1 = 0$ が成り立ちこれを**Euler の等式**という．

Euler の等式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ は数学史上，もっとも美しい数式といわれているんだ!
数の中でも特別な 0 と 1，無理数 e と π，虚数単位 i が混ざってるすごい式なんだよ!

そうなんだ.... 何が綺麗かわかんないけど....
そういえば，$e^{i\theta}$ の計算の 3 行目，足し算の順番を交換したの大丈夫なの?

するどいね．級数の和の順序を勝手に交換することは一般には
してゃいけないことなんだけど，今回のケースに限っては大丈夫なんだよ!
きちんと勉強したかったら，調べてみるといいよ!

【$\sin z = 2$ を満たす z は?】

　実数 x に対して，Euler の公式より $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ だから

$$e^{ix} - e^{-ix} = (\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x) = 2i\sin x$$

なので，$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ であることがわかる．つまり，$\sin x = 2$ のとき，$\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = 2$ だから $t = e^{ix}$ とおくと

$$\frac{t - \frac{1}{t}}{2i} = 2 \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 4it - 1 = 0$$

である．この 2 次方程式を解くと $t = (2 \pm \sqrt{3}i)$ なので，両辺の自然対数をとると

$$ix = \log((2 \pm \sqrt{3})i) = \log(2 + \sqrt{3}) + \log i.$$

ところで，$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ である．従って $\log i = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ となる．以上で

$$x = \log(2 + \sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

が答えになる．