8　Taylor の定理と応用

前回, 平均値の定理から Taylor の定理が証明された．これを無限に繰り返した級数が収束するときに, 関数の Taylor 展開が得られていたが, これの復習と応用をここでは学ぼう．

• **8-1：有限 Taylor 展開**

まずは, 前回学んだ Taylor の定理の主張を思い出そう．

区間 $[a, x]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ は, 開区間 (a, x) で $n+1$ 回微分可能であるとする．このとき, ある $c \in (a, x)$ が存在して, 次の式が成り立つ．

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ここで, $R_{n+1}(c) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ と置いたものを Lagrange の剰余項といった．さて, $c \in (a, x)$ なので c はある $0 < \theta < 1$ を用いて $c = a + \theta(x-a)$ と書くことができる．実際, 点 $\mathrm{C}(c)$ は「数直線上の点 $\mathrm{A}(a)$ から点 $\mathrm{X}(x)$ の間にある」から, $\mathrm{AC} : \mathrm{CX} = \theta : 1-\theta$ （$0 < \theta < 1$）とおけば

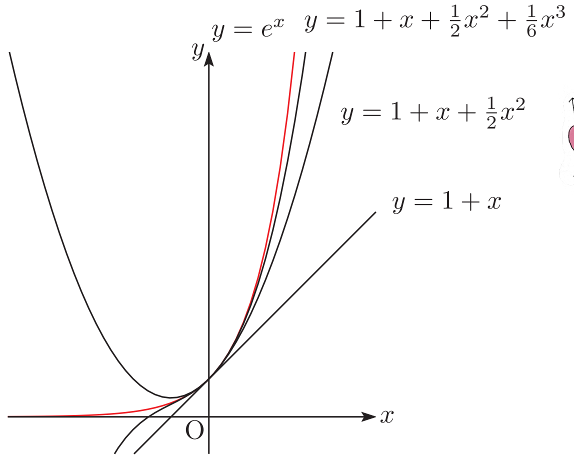
$$\begin{aligned}(1-\theta)\mathrm{AC} = \theta\mathrm{CX} \quad &\iff \quad \mathrm{AC} - \theta\mathrm{AC} = \theta\mathrm{CX} \\ &\iff \quad c - a - \theta(c-a) = \theta(x-c) \\ &\iff \quad c = a + \theta(x-a)\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\end{aligned}$$

とかける．この表示を $y = f(x)$ の $x = a$ における**有限 Taylor 展開**と呼ぶ．特に, $y = f(x)$ の $x = 0$ における有限 Taylor 展開を**有限 Maclaurin 展開**と呼ぶ．

例 8-1　指数関数 $y = e^x$ に対して, 有限 Maclaurin 展開の剰余項を無視して $y = 1 + x$, $y = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$, $y = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$ のグラフを描くと以下のようになる．これをみても分かる通り, グラフはおおよそ $y = e^x$ に段々と近似されていく様子がみてわかる．このように, n が大きければ大きいほど, 近似の精度が上がっていくのである．



$x = 0$ の周辺でグラフが段々と $y = e^x$ に近づいているね!
多項式近似のイメージ湧いた?

• 8-2：関数値の近似計算

この有限 Taylor 展開を応用すれば, 関数の値の近似値を計算することができる．ここでは, $\sqrt{1.1}$ の近似値であって, その誤差が 0.001 以内に収まっているようなものを求めてみよう．そのために $f(x)=\sqrt{x}$ という関数を考える．これの $x=a$ における有限 Taylor 展開を得る為に $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ の高階導関数を計算すれば

- $f^{(1)}(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,
- $f^{(2)}(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=(-1)\cdot\dfrac{1}{2^2}x^{-\frac{3}{2}}$,
- $f^{(3)}(x)=(-1)\cdot\dfrac{1}{2^1}\left(-\dfrac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}=(-1)^2\cdot\dfrac{1\cdot 3}{2^3}x^{-\frac{5}{2}}$,
- $f^{(4)}(x)=(-1)^2\cdot\dfrac{1\cdot 3}{2^2}\left(-\dfrac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}=(-1)^3\cdot\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}x^{-\frac{7}{2}}$,
- $\cdots\cdots$,
- $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}}$.

よって, ある $0<\theta<1$ が存在して

$$\sqrt{x}=f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

となる．従って, $x=1.1$, $a=1$, $c:=1+\theta(1.1-1)$ とすれば, $1<c<1.1$ であって,

$$\begin{aligned}\sqrt{1.1}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(1.1-1)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1.1-1)^{n+1}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(0.1)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(0.1)^{n+1}\end{aligned}$$

を得る．ここで, 誤差 $\left|\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(0.1)^{n+1}\right|$ は 0.01 未満に抑えたいので, $n=2$ とすれば

$$\left|\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\cdot(0.1)^3\right|=\frac{1}{6}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^3}\cdot c^{-\frac{5}{2}}\cdot 0.01<\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}\cdot 0.01<\frac{1}{16}\cdot 0.01<0.01$$

だから, $n=2$ で誤差は 0.01 以内に収まっている．従って,

$$\sqrt{1.1}\fallingdotseq f(1)+\frac{1}{2}\cdot 0.1+\frac{1}{6}\cdot(0.1)^2=1.04875$$

である．

• 8-3：ランダウの記号

与えられた関数を有限 Taylor 展開して多項式で近似できるが, その近似精度を測る誤差は Lagrange の誤差項の評価をみることでわかる．従って, 与えられた関数同士を比較する場合は多項式近似を比較することで大雑把に理解できるが, この際の誤差は精密さを要求せずとも可能な場合がある．そのための記号として「ランダウの記号」を定義しよう．

【定義：ランダウの記号】

$a\in\mathbb{R}$ の近くで定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して, 等式

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

が成り立つとき, $f(x)=o(g(x))\ (x\to a)$ で表し, o を**ランダウの記号**と呼ぶ．極限は $a=\pm\infty$ や片側極限でもよい．

【ランダウの記号にある等号に注意】

極限として $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = 0$ なので, ランダウの記号を用いれば

$$x^2 = o(x) \ (x \to 0), \quad x^3 = o(x) \ (x \to 0)$$

である．しかし, この等号は数学の通常の等号と同じような扱いをしてはいけない．なぜならば, もちろん $x^2 \neq x^3$ だからである．

例 8-2　$0 < x < 1$ とする．このとき,

$$\log(1-x) = -x + o(x) \quad (x \to 0)$$

である．実際, ロピタルの定理（**定理 6.7**）により

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-x) + x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\{\log(1-x) + x\}'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{1-x} + 1}{1} = -1 + 1 = 0$$

だからである．

さて, 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ での有限 Taylor 展開の式を再掲しよう．

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{x \to a} \frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} = 0$$

であるから, Lagrange の誤差は

$$\frac{\frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} \to 0$$

となる．つまり,

$$\frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = o((x-a)^n) \quad (x \to a)$$

を得る．以上で,

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \to a)$$

となることがわかった．これを $y = f(x)$ の $x = a$ における**漸近展開**と呼ぶ．