9　微分法の演習

【演習 9-1】　次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $f(x) = x\tan^{-1}x - \log\sqrt{1+x^2}$　　(2) $f(x) = e^{\sin\sqrt{x}}$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

解　答

(1) 積の微分法と合成関数の微分法を用いる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x\tan^{-1}x)' + (\log\sqrt{1+x^2})' = (x\tan^{-1}x)' + \frac{1}{2}(\log(1+x^2))' \\ &= 1\cdot\tan^{-1}x + x\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} \\ &= \tan^{-1}x \end{aligned}$$

(2) 合成関数の微分法を 2 回用いる.

$$f'(x) = (e^{\sin\sqrt{x}})' = e^{\sin\sqrt{x}}\cdot(\sin\sqrt{x})' = e^{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

(3) 商の微分法と合成関数の微分法を用いる.

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - x\cdot(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

【演習 9-2】　α を定数とする, このとき極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - (1+\alpha x)}{1-\cos x}$$

を求めなさい.

解　答

任意の α に対して, $x \to 0$ とすれば

$$(1+x)^\alpha - (1+\alpha x) \longrightarrow 0, \quad 1-\cos x \longrightarrow 0$$

なので, 求める極限は $\dfrac{0}{0}$ の不定形である. そこで, ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - (1+\alpha x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\{(1+x)^\alpha - (1+\alpha x)\}'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha}{\sin x}$$

となる. ここで, $x \to 0$ とすれば

$$\alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha \longrightarrow 0, \quad \sin x \longrightarrow 0$$

だから, $\dfrac{0}{0}$ の不定形である. 再びロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{\alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha\}'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}}{\cos x} = \alpha(\alpha-1)$$

である. 以上で求める極限は $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - (1+\alpha x)}{1-\cos x} = \alpha(1-\alpha)$ である.

【演習 9-3】　関数 $f(x) = \sin x$ に対して, 次の問いを答えよ.

(1) $y = f(x)$ を $x = \dfrac{\pi}{4}$ において Taylor 展開を適用せよ.

(2) (1) の 2 次の項までを用いて $f(x)$ を $\left|x - \dfrac{\pi}{4}\right| \leq \dfrac{1}{10}$ の範囲で近似するとき, 誤差が 10^{-3} 以内に収まっていることを示せ.

解　答

(1) 関数 $f(x) = \sin x$ の高階導関数を求めると,

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

である. Taylor の定理より $x = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\sin x &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f^{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n + \cdots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \cdots\end{aligned}$$

(2) Taylor の定理を用いて 2 次まで近似すれば,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)}{3!\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

となるような $0 < \theta < 1$ が存在する. このとき, 剰余項は

$$\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)}{3!\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \leq 10^{-3}$$

となるから, 誤差が 10^{-3} 以内に収まっている.

【演習 9-4】
関数 $f(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ の増減, 凹凸などを調べ, グラフの概形をかけ.

解　答

関数 $f(x)$ の第 1 階導関数と第 2 階導関数は

$$\begin{aligned}f'(x) &= -e^{-x+1} + \{-(x+1)e^{-x+1}\} \cdot (-1) = xe^{-x+1} \\ f''(x) &= e^{-x+1} + xe^{-x+1} \cdot (-1) = (1-x)e^{-x+1}\end{aligned}$$

である. よって,

$$f'(x) = 0 \iff x = 0, \quad f''(x) = 0 \iff x = 1$$

である.

このとき増減表は以下のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-e$ （極小値）	↗	-2 （変曲点）	↗

また,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -(x+1)e^{-x+1} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -(x+1)e^{-x+1} = \infty$$

だから, x 軸が漸近線となる. 以上より, グラフの概形は以下のようになる.