微積分学　第 1 回　講義資料

今日の到達目標

地球は丸い．しかし，ごく狭い範囲，たとえば，学校のグランド程度なら「平ら」といってもよい．起伏の多い山道についても同じことがいえる．ごく狭い範囲なら，ふつうは「傾きはほぼ一定」と考えてよい．放物線のようになめらかに変化する曲線でも「この点での傾きは 2.4」などということができる．曲線も微小な部分をとってくれば直線とみなせること，これが「微分」の考え方である．

(1) 関数 $y = f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であるとは ?, $f(x)$ の導関数とは何か ? の定義が言えて具体的に活用できる．

(2) $x = x_0$ で微分可能な関数 $f(x)$ について，点 $(x_0, f(x_0))$ を基準とする増分 Δx, Δy の間には

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + (\Delta x \text{ より高次の微小量})$$

という関係式が成り立つことを理解する．

(3) 関数 $y = f(x)$ の $x = x_0$ における微分 $dy = f'(x_0)dx$ は dy は dx に比例して，その係数が $f'(x_0)$ であること，そして微分は図形的には接線の式であることを理解する．

1.1　微分係数，微分可能の定義と 1 次近似式

定義 1-1 ($x = x_0$ で微分可能の定義)

実数のある区間 I で定義された関数 $f(x)$ が，$x = x_0$ ($x_0 \in I$) で微分可能とは，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \cdots ①$$

なる極限が存在することである[1]．このとき，① の極限値を $x = x_0$ での $f(x)$ の微分係数といい，$f'(x_0)$ (エフプライム x_0 と読む) で表す．

関数 $y = f(x) = x^2$ のグラフの上の点 P $(0.5, 0.25)$ を通る直線を ℓ とし，ℓ が P 以外にグラフと交わる点を Q $(0.5 + h, (0.5 + h)^2)$ とする．下の図 1.1 のように，点 Q が P に近づくように直線 ℓ を P を中心に動かすと，ℓ は青色の直線 PT に近づく．この直線 PT を $y = x^2$ のグラフの点 P における接線といい，点 P をその接点という．点 Q が P に近づくとき，$h \to 0$ であるから，接線 PT の傾きは，$h \to 0$ のときの直線 PQ の傾きの極限値として求められる．この極限値は $x = 0.5$ での $f(x)$ の微分係数でもある[2]．

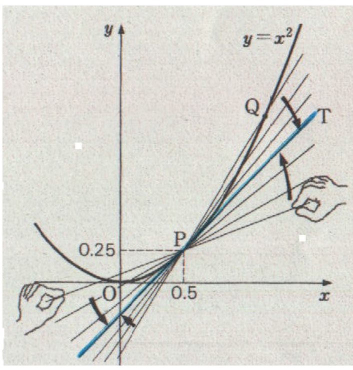

図 1.1　接線 PT での傾き

[1] lim は limit の略で，リミットと読む．記号 $\lim\limits_{x \to x_0} \square$ において，"□" は x が x_0 に近づくときに変動する変数であり，"$\lim\limits_{x \to x_0} \square$" は □ がそこに向かって動いていく目標にあたる定数である．

[2] ①式で，$x = 0.5 + h$, $x_0 = 0.5$ とおけば，$x - x_0 = h$ であり，x が x_0 に近づくとき h は 0 に近づく．よって，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0.5 + h) - f(0.5)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(0.5 + h)^2 - 0.5^2}{h}$ となる．

[問 1-1] (接線の傾きおよび接線の方程式)

関数 $f(x) = x^2$ について,

(1) $x = 0.5$ での微分係数を求めよ.

(2) $x = 0.5$ における接線の方程式を求めよ.

定義 1-2 (区間 I で微分可能の定義)

区間 I で定義された関数 $f(x)$ が, 任意の $x_0 \in I$ に対し, $x = x_0$ で微分可能であるとき, $f(x)$ を区間 I で微分可能, あるいは単に $f(x)$ は微分可能という. このとき, $x_0 \in I$ に対して, $f'(x_0)$ を対応させる関数を $f(x)$ の導関数といい, $f'(x)$ で表す. 関数の導関数を求めることを, その関数を微分するという.

[問 1.2 (教科書 p.4, 問題 1.2 改)] (つなげて作った関数の微分可能性)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x^2 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なる関数 $f(x)$ を考える.[3]

(1) $f(x)$ の $x = 0$ での右微分係数を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x = 0$ での左微分係数を求めよ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能かどうか調べよ.

次に関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であることの意味を考える.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

なる定義式は, x が x_0 に十分近いとき,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \fallingdotseq f'(x_0)$$

であることを示している. つまり,

$x \fallingdotseq x_0$ のとき,

$$f(x) - f(x_0) \fallingdotseq f'(x_0)(x - x_0) \quad \cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

というのが微分の基本的なイメージである. これは

$$\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = f(x) - f(x_0) \end{cases}$$

とおくと[4],

[3]微分係数および左微分係数の定義が分からない人は, 教科書 p.2 の注 1.1.1 を参照せよ.

[4]一般に, x の変化量を Δx と書き, それに対応する y の変化量を Δy と書く. Δ はギリシア文字でデルタと読む.

$$\Delta x \fallingdotseq 0 \text{ のとき, } \Delta y \fallingdotseq f'(x_0)\Delta x \quad \cdots\cdots \text{Ⓑ}$$

が成り立つということである. Ⓐ, Ⓑ の近似式は, $x = x_0$ の近くでの $y = f(x)$ の変化 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ を $\Delta x = x - x_0$ の 1 次式で近似したものなので, Ⓐ, Ⓑ の右辺を Δy の 1 次近似式という. それに対して

$$f(x) \fallingdotseq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

と元の $y = f(x)$ を近似した 1 次式を, $f(x)$ の $x = x_0$ での 1 次近似式という[5].

定義 1-3 (1 次近似式)

関数 $f(x)$ が, $x = x_0$ で微分可能なとき,

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \cdots\cdots ②$$

なる 1 次関数 $g(x)$ を, $f(x)$ の $x = x_0$ での 1 次近似式という. ($y = g(x)$ は $x = x_0$ での接線の式でもある !)

[問 1.3] ($f(x) = \sqrt{x}$ の 1 次近似式)

(1) $f(x) = \sqrt{x}$ の $x = x_0$ での 1 次近似式 $g(x)$ を作れ.

(2) $\sqrt{25.01}$, $\sqrt{25.02}$ をそれぞれ $x = 25$ で 1 次近似せよ.

さて, 元の関数 $f(x)$ と $x = x_0$ での 1 次近似式の誤差を考えてみよう.

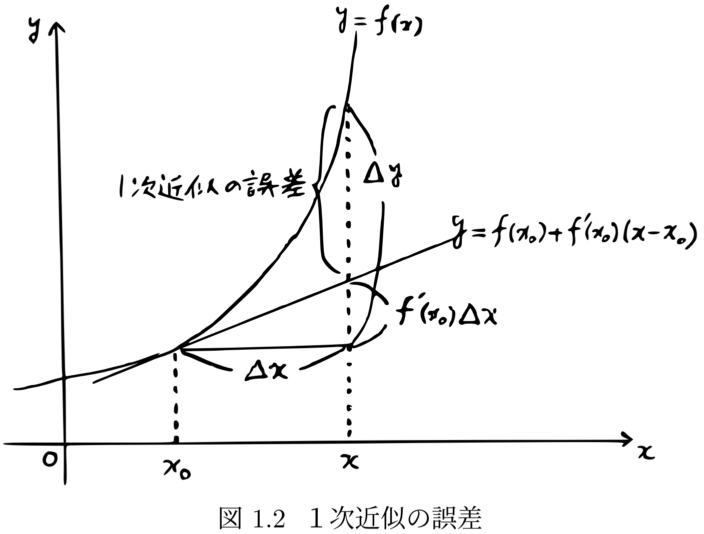

図 1.2　1 次近似の誤差

$$1 \text{ 次近似の誤差} = f(x) - \{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

Δx は Δ と x の積ではなく, 合わせたものが 1 つの記号である. Δx を x の増分, Δy は y の増分ともいう. 一般に, 変数の増分とは

(変化したあとの値) − (はじめの値)

である. したがって, 増分は負になることもある.

[5] 2 次, 3 次の近似式も存在する. これらは第 7 章で学ぶ.

なので, 微分係数の定義より

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1\text{次近似の誤差}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

が成立する.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1\text{次近似の誤差}}{x - x_0} = 0 \cdots\cdots \copyright$$

$x \to x_0$ のとき, 1 次近似の誤差自体が 0 に近づくのは当然であるが, Ⓒは, 1 次近似の誤差を $x - x_0$ で割ってもなお 0 に近づく. その意味で, 1 次近似の誤差は $x - x_0$ よりも高次の微小量という.

このように, 関数 $y = f(x)$ 上の点 $(x_0, f(x_0))$ を基準とする増分 Δx, Δy について,

$$\begin{aligned} \Delta y &= (\Delta x \text{ に比例する部分}) + (\text{そこからのずれ}) \\ &= f'(x_0)\Delta x + (\Delta x \text{ より高次の微小量}) \end{aligned}$$

と書ける (図 1.2). 微分係数 $f'(x_0)$ を求めることは, この Δx に比例する部分を取り出すことにあたる.

[問 1.4] (1 次近似の意味)

下図は, $y = f(x) = 5x - x^2$ について, $x = 1$ において正比例で近似し, その様子を図示したものである.

(1) この正比例を Y と X を用いて求めよ.

(2) $y = f(x) = 5x - x^2$ 上の点 $(1, 4)$ を基準とする増分 Δx, Δy について, Δy を $(\Delta x$ に比例する部分$) + (\Delta x$ より高次の微小量$)$ の形で表せ.

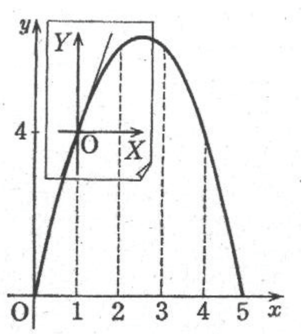

図 1.3

1.2 微分 $dy = f'(x)dx$

関数 $y = f(x)$ の導関数は

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx},$$

など, いろいろな記号で表される. たとえば, $y = f(x) = x^2$ のとき, その導関数は $2x$ であるから

$$y' = 2x, \quad f'(x) = 2x, \quad \frac{dy}{dx} = 2x, \quad (x^2)' = 2x$$

などと書く.

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ で, $x = x_0$ を代入した値 $f'(x_0)$ が, その点における関数の変化率である. そして, 上の問 1.4 の結果から分かるように, 導関数を考えることは, それぞれの点 $(x, f(x))$ で, 近似の正比例 $Y = f'(x)X$ を貼り付けることにあたる. あるいは, 点 $(x, f(x))$ ごとに $Y = f'(x)X$ を表す線分を取り付けることであるといってもよい (図 1.4). スキー場のゲレンデにおけるスキーの板を思い浮かべると分かりやすいかもしれない (図 1.5).

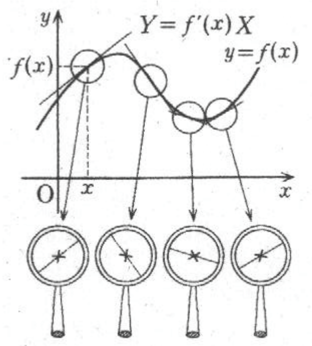

図 1.4　Δx に比例する部分を取り出す

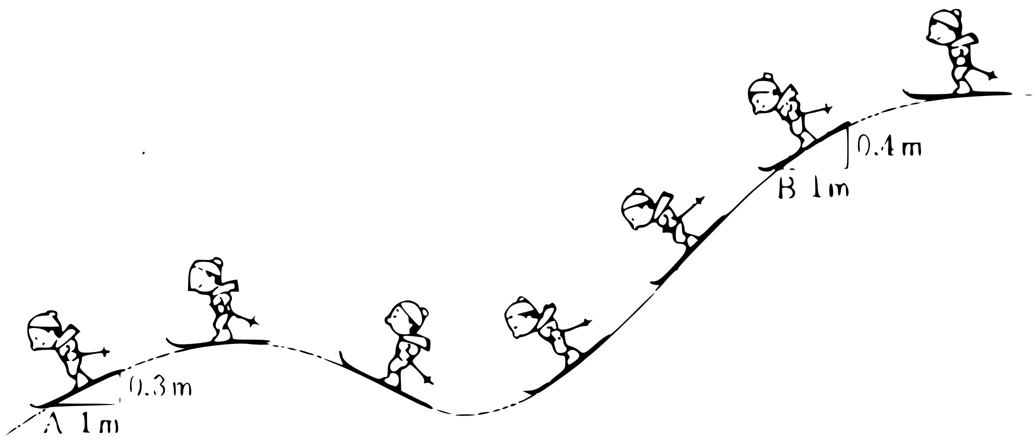

図 1.5　スキー場のゲレンデにおけるスキーの板

この正比例関数は曲線上の点を固定するごとに定まる座標なので, X の代わりに dx, Y の代わりに dy を用いるのが普通で, $Y = f'(x)X$ の代わりに, $dy = f'(x)dx$ と書く. この正比例関数を $y = f(x)$ の x での微分という.

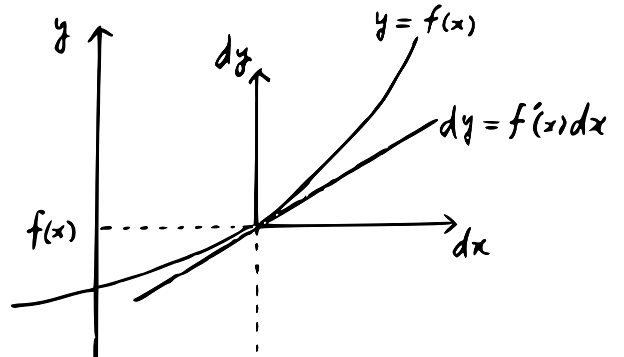

図 1.6　$y = f(x)$ の微分 $dy = f'(x)dx$

変化率 $f'(x)$ を微分係数とも呼ぶ理由は, この正比例関数の係数だからである. $dy = f'(x)dx$ だから, 導関数 $f'(x)$ を

$$\frac{dy}{dx}$$

と表す理由はこのためでもある[6]. したがって, 等式

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

を「右辺の dx を約分して dy になる」と単純に捉えてはいけない. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x, f(x))$ における接線を, 接点を原点とする座標 dx-dy でみたときに正比例になり, その比例定数が $\dfrac{dy}{dx}$ となることを表現した式である.

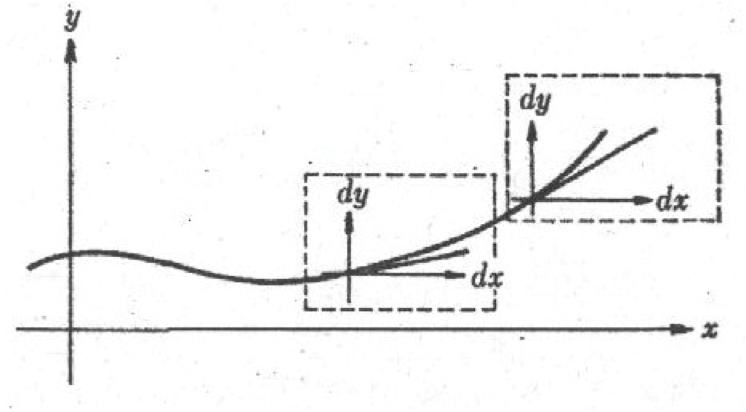

図 1.7 dy は dx に比例して, その比例定数が $\dfrac{dy}{dx}$ となる

[問 1.5] ($y = f(x)$ の微分)

$y = x^3$ のとき,

(1) $x = 1$ での微分を求めよ.

(2) $x = 2$ での微分を求めよ.

(3) $x = -3$ での微分を求めよ.

このように, 曲線の微小部分を虫メガネなり, 顕微鏡で十分に拡大したものを考えると直線に見えて, その直線が正比例の関数として表せる. しかし, ここで述べたことが起きないときもある. それは曲線上に折れ曲がった点がある場合で, 折れ曲がった点を中心にいくら拡大しても, 直線に見えてこない (図 1.8).

[6] この記法はひとまとまりの記号である.

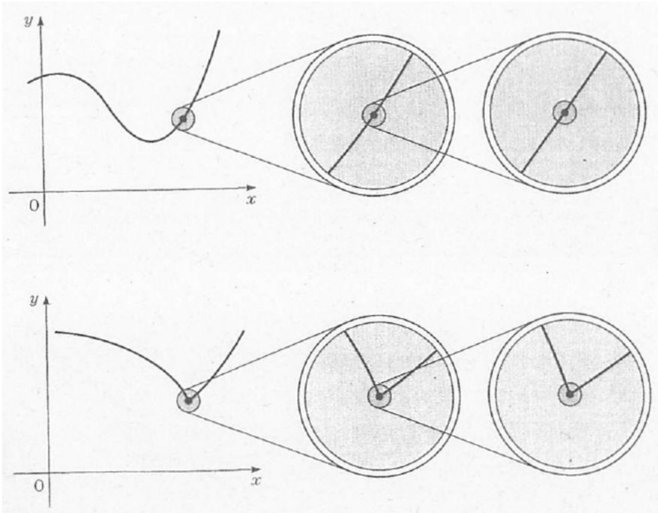

図 1.8　曲線の微小部分を拡大する

さらに, 曲面に関しても同じことが言える．すなわち, 曲面上の微小部分を拡大すると平面に見える (図 1.9)．その平面が正比例の関数として表せる．(詳細は後期開講の多変数の微積分学で学ぶ.)

これまでの話を簡潔にまとめると, 微分法とは曲がったものをまっすぐなもので近似することである．高校までだと「微分のイメージは接線」と考える学生諸君が多いが, 大学の数学ではそれだけでは不十分である．したがって, 高校までに学んだ内容でも, 大学レベルの目線で捉えることができるように訓練する必要がある．油断することなく, 授業の聴講および自宅外学修を行うことを習慣付けてほしい.

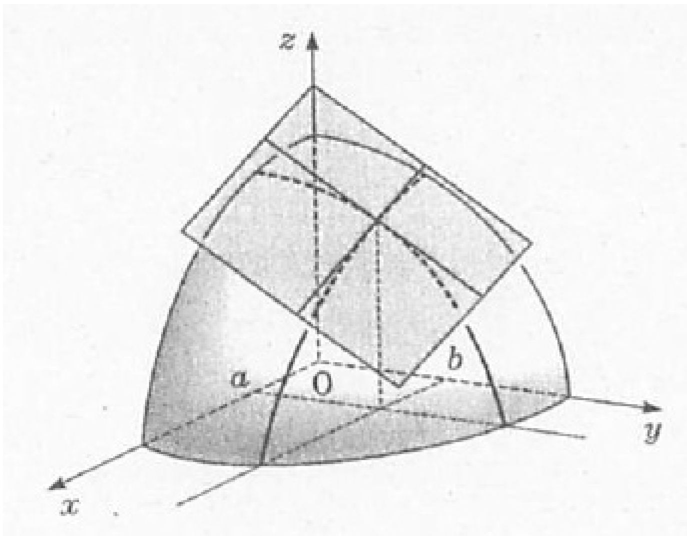

図 1.9　曲面を平面で近似する

[問 1.6]　(連続性と微分可能性)

関数 $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0\,\text{のとき}) \\ 0 & (x = 0\,\text{のとき}) \end{cases}$ について, 以下の各問に答えよ.

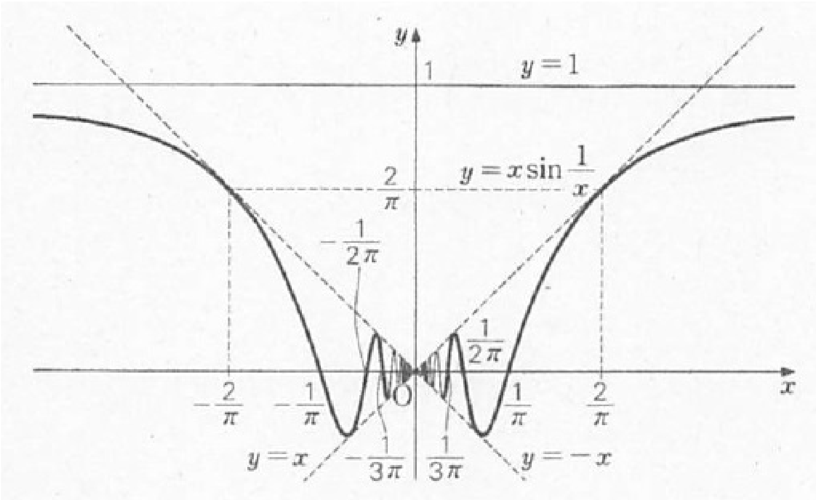

図 1.10　$y = f(x)$ のグラフ

(1)　$x = 0$ で連続かどうか調べよ.

(2)　$x = 0$ で微分可能かどうか調べよ.

問の解答は manaba にアップする.

manaba 小テストの回答期間：

4月11日 (金) の14時55分〜4月14日 (月) の17時00分まで

解答が終了しても「提出」のボタンを押し忘れると, 0 点となる！