微積分学　第 2 回　講義資料

今日の到達目標

微分がどのように役に立つかを学ぶ. 学習項目は微分方程式および速度・加速度の 2 つである.

(1)　微分方程式を立てて解くとはどういうことか？ 大雑把にいえば以下のようになる.

$$\begin{cases} \text{微分方程式を立てる} & = \text{微小変化量の関係式を作る} \quad \cdots\cdots Ⓐ \\ \text{微分方程式を解く} & = \text{全体の変化の様子を知る} \quad \cdots\cdots Ⓑ \end{cases}$$

微分を用いて微小変化量の関係式を作り, 積分を使ってその微小変化量を積み上げることで全体の変化の様子が分かる. すなわち, 微分方程式を立てて解くこと自体が微分積分の意味を理解することに結びつく.

(2)　瞬間速度および瞬間加速度など時々刻々変化する比の量を定義するためには極限操作が必要である.

2.1　微分方程式の意味と変数分離法

最初は教科書 p.6 ～ p.7 を参照しながら, 取り組むこと. 上り坂のジェットコースターの設計では, その曲がり加減が

『出発地点から水平距離 x だけ離れたところでの傾きが x になる』　$\cdots\cdots$　$(*)$

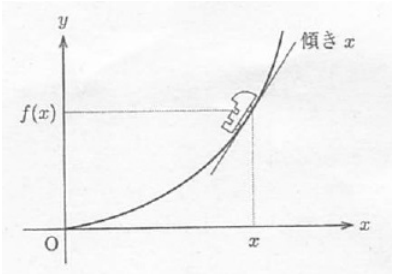

図 2.1　上り坂のジェットコースター

ことを要求している. 問題は, 出発地点からの高さを y とし, カーブを表す関数を $y = f(x)$ とするとき, $f(x)$ を求めることである. $(*)$ は上記の今日の到達目標 (1) の Ⓐ に相当して,

$$\frac{dy}{dx} = x$$

となる. つまり, $f'(x) = x$ が成立している. 一方, ジェットコースターの出発地点は原点 O であるから $f(0) = 0$ である. したがって,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx = 0 + \int_0^x x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2$$

となる. これで, ジェットコースターの設計に関しては, 今日の到達目標 (1) の Ⓑ を達成できた.

ところが,　教科書 p.7 の問 2.1.1 のようになると, そう簡単ではない.

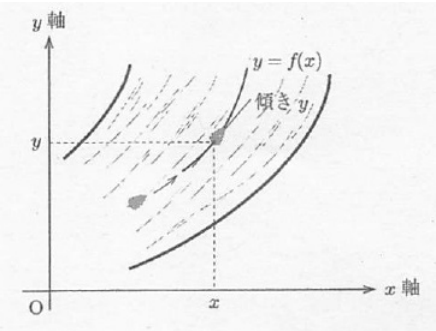

図 2.2　川面の木の葉

問題の要求から, 求める微分方程式が

$$\frac{dy}{dx} = y \ \cdots\cdots \ ①$$

となることは容易に分かるだろう. これを上記と同様に考えて,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx = 1 + \int_0^x ydx = 1 + xy$$

と考えるのは誤りである (簡単のため $f(0) = 1$ とした). その理由は y は x の関数であって, 定数ではないからである. 上式の $\displaystyle\int_0^x ydx$ は y を使わずに書けば $\displaystyle\int_0^x f(x)dx$ である. 求めたい $f(x)$ が積分記号に中に含まれているから, 単純な積分では $f(x)$ を求めることはできない. ① 式は曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きが常に y であること, もう少し詳しく言えば, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 (x, y) における接線の傾き $\dfrac{dy}{dx}$ が x 座標によらずに y であることを意味する. 一般に傾きは位置 (x, y) で決まるので, その傾きを線分として図示したものを傾きの場と呼ぶ[1]. $\dfrac{dy}{dx} = y$ の傾きの場を図示すると以下のようになる. たとえば y 座標が 2 である線分の傾きはすべて 2 になっていることが読み取れる. 他の場所でも同じである. したがって, 点 $(x, y) = (0, 1)$ を通るときの $\dfrac{dy}{dx} = y$ の解 $y = y(x)$ は図 2.3 の実線のような曲線を描くことが分かる[2].

[1]一般に, 電磁場, 重力場のように, 位置によって何かが決まるとき, その決まるものを場という.
[2]関数を表す記号 f を使わずに y で代用する書き方 $y = y(x)$ は物理などでよく使われる.

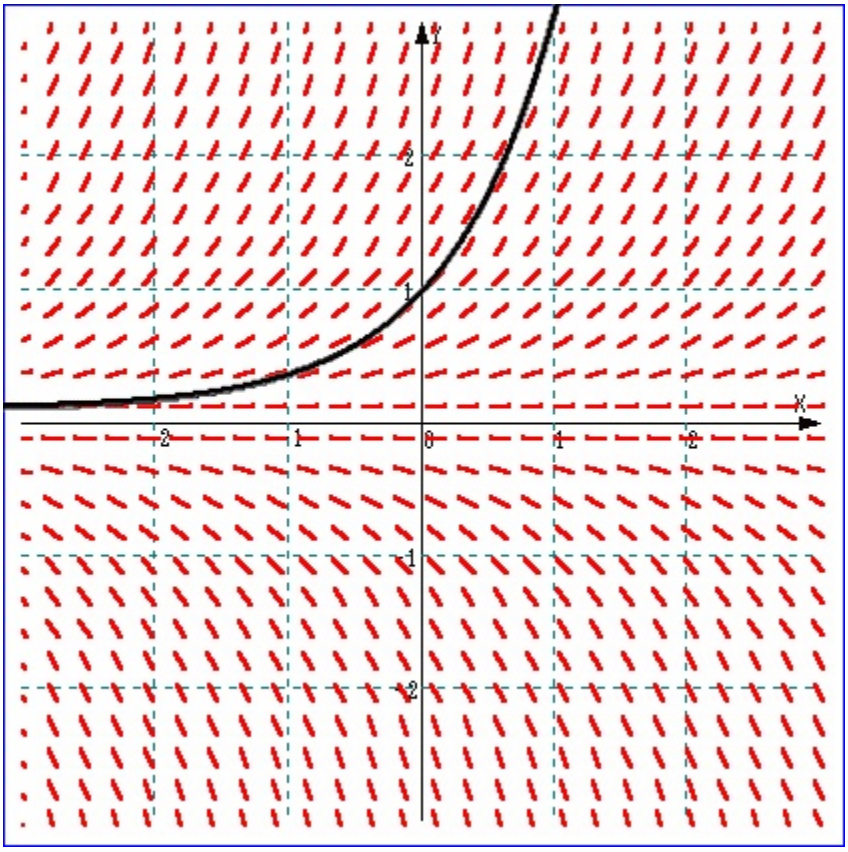

図 2.3 $\dfrac{dy}{dx} = y$ の傾きの場

$\dfrac{dy}{dx} = y$ は 1 つの等式のように見えるが, 図 2.3 の座標平面におけるあらゆる点での接線の傾き (赤色の線分) という無数の情報を提供しているのである. そして, $x = 0$ のとき $y = 1$ を通るという初期条件を考慮すると, 黒太で示された曲線が微分方程式 ① の解としてただ 1 つに定まる.

さて, ① の微分方程式は, 1 次近似の立場でみれば, 曲線 $y = y(x)$ において, 微小変化 Δx, Δy の間には

$$\Delta y \fallingdotseq y\Delta x \quad \cdots\cdots ②$$

なる正比例近似関係があることを示す. 変化量を扱うときの定石：

> 変数を分離できるなら分離せよ

に従えば, ②は

$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{y\text{ だけ}}\Delta y \fallingdotseq \underbrace{\Delta x}_{x\text{ だけ}}$$

と変形できる. dx, dy の等式として表せば,

$$\frac{1}{y}dy = dx \quad \cdots\cdots ③$$

となる[3].

[3] Δx, Δy の記号を使うときは曲線上での微小変化を考えている. 一方, dx, dy の記号を使うときは曲線でなく曲線に接する接線上での微小変化を考えている. この違いをはっきり認識することが大事である.

.

つまり, イメージ的には $u = \dfrac{1}{y}$, $v = 1$ とし, 第 1 象限のみでグラフを考えると,

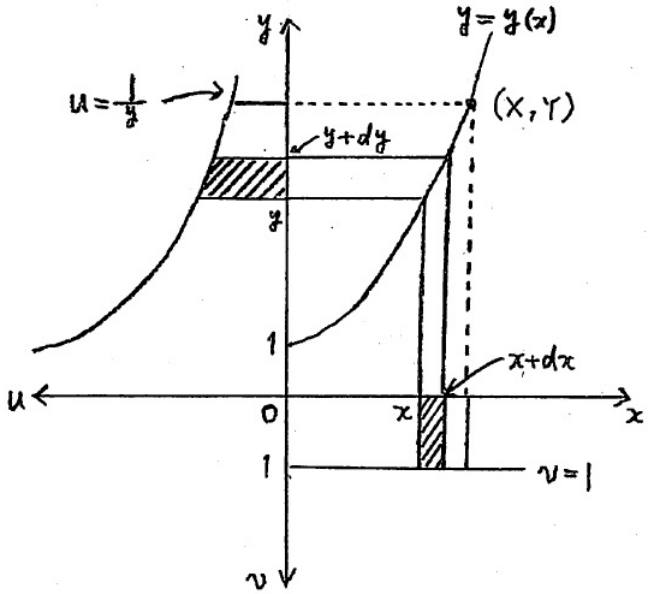

図 2.4 $\dfrac{1}{y}dy = dx$ のイメージ

となっており, ③ より, 図 2.4 の斜線部分の面積が等しいので, (x, y) を $(0, 1)$ から (X, Y) まで, $y = y(x)$ 上で動かしながら足し合わせていっても, その和は等しくなり,

$$\int_{y=1}^{y=Y} \frac{1}{y}dy = \int_{x=0}^{x=X} dx \ \cdots ④$$

が成立する. ④ の両辺の積分を実行すると

$$[\log y]_1^Y = [1]_0^X, \quad \log Y - \log 1 = X - 0, \quad Y = e^X$$

として, X, Y の関係が求まる. X, Y をそれぞれ x, y で置き換えると $y = e^x$ となる. なお, ④ 式の代わりに

$$\int_1^y \frac{1}{y}dy = \int_0^x dx$$

と書くことにすると, 使う文字を節約できる.

[問 2.1] (変数分離法で微分方程式を解く)

初期条件 $x = 0$, $y = 1$ のもとで, 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ を解け.

$\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ は, $(x, y) = (1, 1)$ では $\dfrac{dy}{dx} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$, $(x, y) = (2, 3)$ では $\dfrac{dy}{dx} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ などということを表しており (どの線分の傾きなのか, 各自でチェックせよ), この微分方程式の傾きの場を図示すると, 下図のようになる.

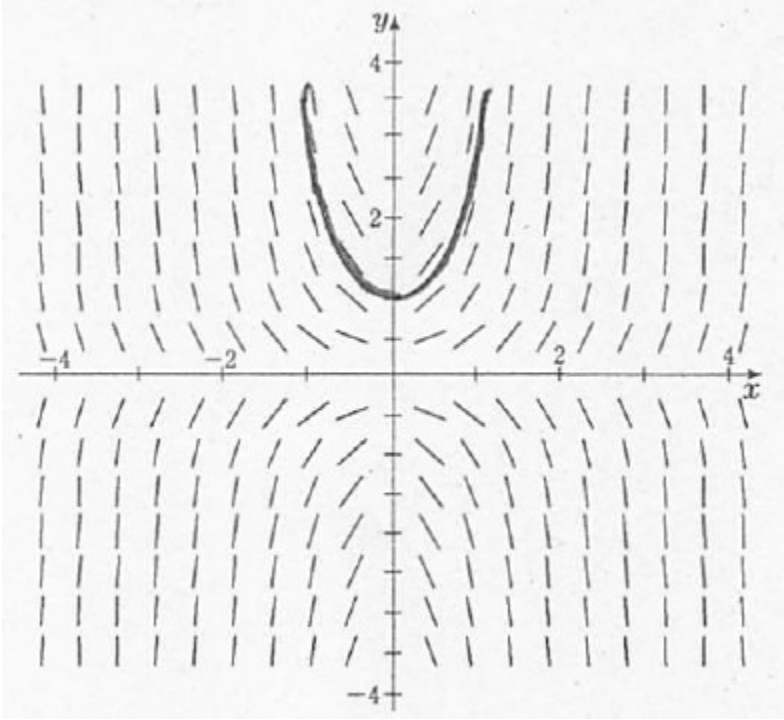

図 2.5 $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ の傾きの場

従って, この傾きの様子から, $(x, y) = (0, 1)$ を通るときの微分方程式の解は, およそ 図 2.5 の実線のような曲線を描くことが分かる. 実際に微分方程式を解くときには傾きの場の図示する必要はない. 変数分離法を使って解けばよい.

2.2 変化率

「自動車が, 時速 60 km で走っている. この自動車は, 1 日に何 km 進むか ?」と問われて, 60 km/h ×24 h= 1440 km と答える人はいないだろう. 1 日も, ぶっとおしで走れるわけがないし, 等速直線運動なんて, 現実には不可能である. まっすぐな道を走るにしても, 最初から時速 60 km を出すのは無理であり, ぴったり時速 60 km に保つことなどできない. でも, それにかかわらず, 時速 60 km の速度という言葉は, 意味をもっている. 時速計が 60 km を指している. その瞬間には, やはり, 時速 60 km である. 瞬間速度とは何なのか？速度が変化しないくらい短い時間とは, 理想的には 0 であるが, 0 秒間では位置の変化も 0 m であるし, また 0 秒間で割り算することもできない. そこで,

① 非常に短い時間, つまり Δt 秒間でほんのわずか Δx m だけ移動したときの平均の速度 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ を求める

② その結果をもとにして, Δt が 0 に近づいたら, 平均の速度がどうなるか, という理想的な状態を考える

とする. こうして, 速度は変位を時間で微分したもの, 加速度は速度を時間で微分したものとして定義できる. 速度や加速度を実感したかったら, 電車かバスに乗ればよい. 外の景色は映画のように流れる. これが速度の現れである. また, 発車や停止のとき, 体がグラリとする. これは加速度の影響である.

[問 2.3] (位置・速度・加速度その１)

x 軸上を運動する物体の時刻 t における速度を $v(t)$ とし, 加速度を $a(t)$ とする. $v(0) = 0$ かつ $a(t) = t$ のとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $v(t)$ を求めよ.

(2) この物体の時刻 t における位置 $x(t)$ を求めよ. ただし, $x(0) = 1$ とする.

[問 2.4] (位置・速度・加速度その 2)

x 軸上を運動する点 P の x における速度 v が $v = 1 + \sin x$ と表されるとする. P の x における加速度を求めよ.

問の解答は manaba にアップする.

manaba 小テストの回答期間：

4 月 18 日 (金) の 14 時 55 分〜4 月 21 日 (月) の 17 時 00 分まで

解答が終了しても「提出」のボタンを押し忘れると, 0 点となる！

「提出」のボタンを押した後は, 解答の修正はできない.