

今日の到達目標—微分法の基本公式—

積・商の微分公式, 合成関数の微分法および逆関数の微分法を取りあげる. 微分法とは曲がったものをまっすぐなもので近似することであるから, 微分法の基本公式は比例を基礎にして導くことができる.

- (1) 積の微分公式は, 微小変化量に比例する 1 次の項のみを残して, 2 次以上の項は無視できるという観点で考える.
- (2) 合成関数の微分公式 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ を「 dx は約分して消える」のように捉えてはいけない. この公式の本質は「比例の合成はまた比例になること」, すなわち, 2 つの比例関数 $Y = aX$ と $X = bT$ の合成関数 $Y = abT$ になるという事実にある.
- (3) 逆関数の微分公式 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ も同様に, 「 dx と dy をひっくり返せばよい」のように覚えるのは望ましくない. 「 $Y = aX$ に対して $a \neq 0$ ならば $X = \frac{1}{a}Y$ になる。」という比例関数について成り立つ事実が本質的である.

3.1 積・商の微分法

[問 3.1] (積の微分公式)

$x = x(t)$, $y = y(t)$ がともに微分可能な関数とする. t の増分 Δt に対する x, y の増分をそれぞれ Δx , Δy とおく.

$(x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy$ を計算することにより, 積の微分公式

$$(x(t)y(t))' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$$

を導け.

積の微分公式は, 長方形の 2 辺の長さをほんのわずかに増やしたとき, 面積がどのくらい増えるかを考えるとイメージが沸くだろう. 商の微分公式は, 積の微分公式と合成関数の微分公式を組み合わせれば導くことができるので, 後 (この講義資料 4 ページ, 問 3.4) で練習する.

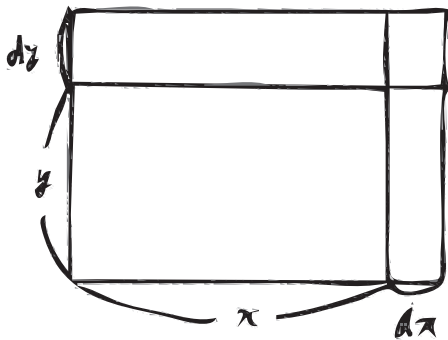


図 3.1 長方形の面積はどのくらい増えるか

3.2 合成関数の微分法

3.2.1 合成関数

自動車の走行距離と消費したガソリンの料金との関係を考える. ある自動車は, 1 l のガソリンで 10 km 走るといふ. x km 走ったときのガソリンの消費量 y l は, 次のように x についての関数 $f(x)$ で表される.

$$y = f(x) = \frac{x}{10} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

次に, ガソリン 1 l の値段を 120 円とすると, ガソリン y l の料金 z 円は, 次のように y についての関数 $g(y)$ で表される.

$$z = g(y) = 120y \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

このとき, x と z の関係は次のような図で表すこともできる.

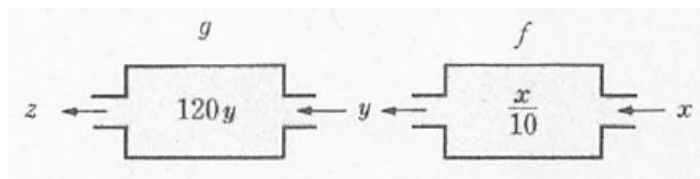


図 3.2 f の次に g の操作を行う

上の図を次のようにひとまとめにして表すこともできる.

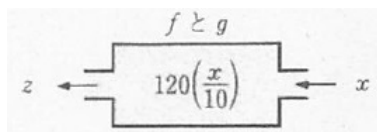


図 3.3 合成関数 $g \circ f$

つまり, この自動車の走行距離 x km と消費したガソリンの料金 z 円は, $z = 12x$ という関係にある. 一般に, 2つの関数 $y = f(x)$, $z = g(y)$ から, 新しい関数 $z = g(f(x))$ が作られる¹. これを関数 $f(x)$ と $g(y)$ の合成関数という. いま, 2つの関数 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x - 3$ についての合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ をそれぞれ求めて比較してみよう.

$$g(f(x)) = g(2x + 1) = 4(2x + 1) - 3 = 8x + 1, \quad f(g(x)) = f(4x - 3) = 2(4x - 3) + 1 = 8x - 5$$

このように, 一般には, 2つの合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ とは, 違う関数である.

¹これを $(g \circ f)(x)$ と書くこともある.

[問 3.2] (合成関数その 1)

2 つの関数 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ について, 次の合成関数を求めよ.

(1) $g(f(x))$ (2) $f(g(x))$ (3) $g(g(x))$

関数 $y = \sqrt{2x+1}$ について, x にある値を代入して, y の値を求めるとき, 計算の順序を次のように分解して考えてみる.

I. $f(x) = 2x + 1$ において, $f(x)$ の値を求める.

II. $g(x) = \sqrt{x}$ とし, $y = g(f(x))$ において, y の値を求める.

以上の I, II より, $y = \sqrt{2x+1}$ は $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数とみなすことができる. このことを図で表すと, 次のようになる.

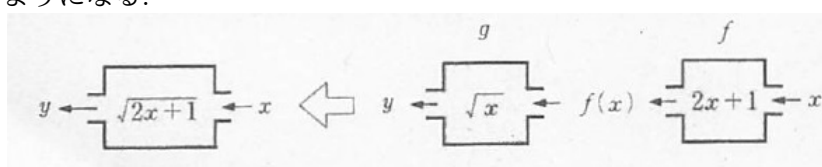


図 3.4 I と II の操作

[問 3.3] (合成関数その 1)

次の関数を 2 つの関数の合成関数とみなすとき, それぞれの関数を言え.

(1) $y = (x^2 + 3x + 1)^4$ (2) $y = \frac{1}{x^3}$ (3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 (4) $y = \sin^3 x$ (5) $y = 3^{2x+3}$ (6) $y = (\log_2 x)^2 + \log_2 x$

3.2.2 合成関数の微分法

2 つの関数 $y = f(x)$, $x = g(t)$ はともに微分可能な関数とする. $y = f(x)$ に $x = g(t)$ を代入すれば, $y = f(g(t))$ という合成関数ができる. このとき, y を t で微分するにはどうすればよいか? 高校で学んだように, 結果は

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)g'(t) = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad \dots \textcircled{1}$$

となり, これが合成関数の微分公式である. ただし, ほとんどの学生諸君が $\textcircled{1}$ 式を

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

のように dx は“約分して消える”と覚えていて, その意味を把握していないのではないだろうか?

$y = f(x)$ の導関数を $\frac{dy}{dx}$ と表す理由は, $y = f(x)$ の微分 $dy = \frac{dy}{dx} dx$ の比例定数を表すのに便利だからである (本授業の第 1 回ですでに学習済み). したがって, 合成関数の微分法もこの観点で考えればよい.

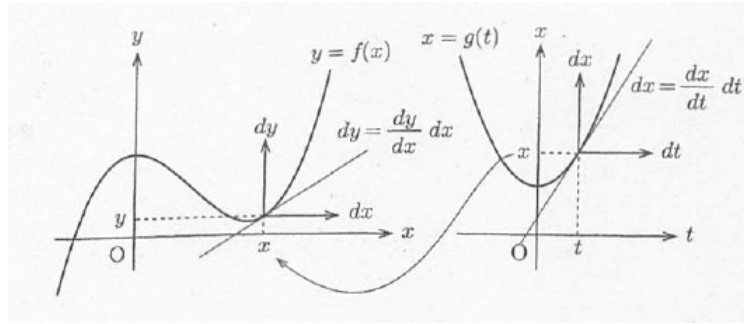


図 3.5 2つの微分 $dy = \frac{dy}{dx} dx$ と $dx = \frac{dx}{dt} dt$ の合成

$y = f(x)$, $x = g(t)$ の微分はそれぞれ $dy = \frac{dy}{dx} dx$, $dx = \frac{dx}{dt} dt$ であるから, 後者の式を前者に代入すると,

$$dy = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} dt$$

となる. 波線部分 $\frac{dx}{dt}$ をひとまとりの記号 $\frac{dy}{dt}$ で表すので, ① 式が得られる.

例 3.1 $y = x^3$ かつ $x = t^2 + 1$ のとき, $\frac{dy}{dt}$ を求める問題を考える. $\frac{dy}{dx} = (x^3)' = 3x^2$, $\frac{dx}{dt} = (t^2 + 1)' = 2t$ であるから, ① 式より

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)g'(t) = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = 3x^2 \cdot 2t = 6tx^2 = 6t(t^2 + 1)^2$$

となる. がしかし, 多くの人には次のように計算するだろう. $y = x^3$ に $x = t^2 + 1$ を代入すると, $y = (t^2 + 1)^3$ となるから,

$$\frac{dy}{dt} = 3(t^2 + 1)^2 \times (t^2 + 1)' = 3(t^2 + 1)^2 \times 2t = 6t(t^2 + 1)^2 \quad \dots \text{②}$$

いずれも, 合成関数の微分公式を使っていることに変わりはないが, 「 $y = (t^2 + 1)^3$ を t で微分せよ」と言われたとき, わざわざ, $x = t^2 + 1$ とおいて, $y = x^3$, $x = t^2 + 1$ のように書き換える人はいないと推測される. では, どのように考えているか, というと $t^2 + 1$ をひとかたまりとみてこれのかんづめ $\boxed{}$ と呼ぶことにすると,

$$\frac{dy}{dt} = \left\{ \boxed{(t^2 + 1)}^3 \right\}' = \underbrace{3 \boxed{}^2}_{\text{かんづめで微分}} \times \underbrace{\boxed{}'}_{\text{かんづめの中身の微分を掛ける}}$$

と計算しているはずである. 合成関数の微分は, 頭の中でこのように考えればよい.

[問 3.4—(教科書 p.11, 問 3.1.1)] (商の微分公式)

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ の商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ を $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ と見做して, 微分せよ.

続いて, 教科書 p.13 の問 3.2.2 および p.15 の問題 3.1 を各自, ノートに解いてみよう.

3.3 逆関数の微分法

3.3.1 逆関数

糸の端に 5 円玉を結びつけて、長さ 25 cm の振り子を作ると、周期はほぼ 1 秒になる²。糸の長さを 4 倍の 1 m にすると 2 秒、さらに、1 m の 4 倍の 4 m にすると 4 秒になる。糸の長さが x m の振り子の場合の周期 y 秒は、ほぼ

$$y = 2\sqrt{x} \quad \dots \textcircled{1}$$

となることが知られている³。これは、振り子の長さを決めれば、周期が決まるという関数である。

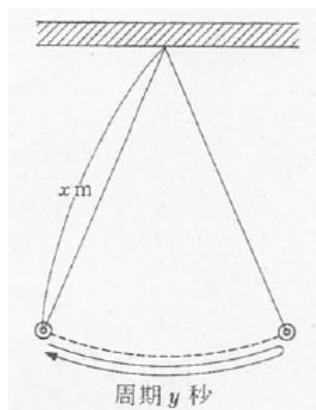


図 3.6 振り子

いま、逆に、周期を決めることで、振り子の長さを決めることができる。この関数について考えてみる。 $y = 2\sqrt{x}$ を x について解くと

$$x = \frac{y^2}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ただし、 $y > 0$ である。ここで、 $\textcircled{2}$ は、 y についての関数である。一般に、関数 $y = f(x)$ について、 y の値を決めると、それに対応する x の値がただ 1 つだけ決まるとき、 y を独立変数、 x を従属変数とする関数であると考えることができる。この関数を

$$x = f^{-1}(y)$$

と表し⁴、 $y = f(x)$ の逆関数という。上の例の場合、関数 $\textcircled{2}$ は関数 $\textcircled{1}$ の逆関数である。

²ここでいう周期とは、1 往復するのにかかる時間のことである。

³振幅が小さいときは重力加速度を g として $y = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$ である。

⁴ f^{-1} は f インバースと読む。

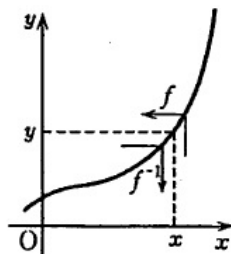


図 3.7 f と f^{-1} の関係

関数 $y = f(x)$ のグラフが図 3.7 のようであるとき、逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は同じグラフで y の方から x の値を読めばよい。ただし、独立変数を横軸にとり、従属変数を縦軸にとるという習慣があるので、それに従うときは y 軸を横軸にとる。それには、紙に $y = f(x)$ のグラフをかいておき、図 3.8 のように斜め 45° の線を軸にして回して裏返し、透かして見ればよい

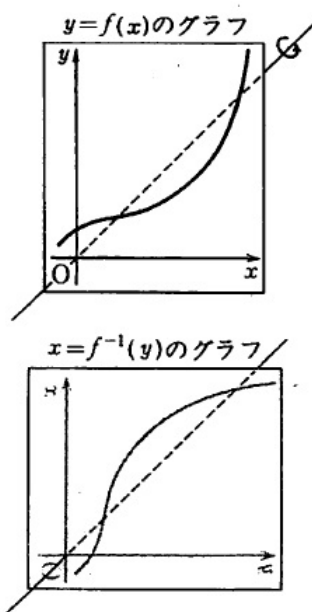


図 3.8 $x = f^{-1}(y)$ のグラフ

さらに、数学では習慣として、独立変数を x 、従属変数を y と表すことが多いので、逆関数 $x = f^{-1}(y)$ についても、 x と y を入れ換えて、 $y = f^{-1}(x)$ と表すことにする。

[問 3.5] (逆関数)

次の関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ。

$$(1) y = 2x + 1 \quad (2) y = x^2 \ (x \geq 0) \quad (3) y = \frac{1}{x+3} \quad (4) y = e^x$$

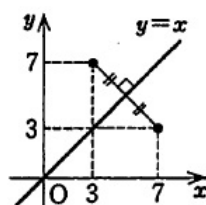


図 3.9 $y = 2x + 1$ 上の点 $(3, 7)$ と逆関数 $y = \frac{x-1}{2}$ 上の点 $(7, 3)$

3.3.2 逆関数の微分法

$y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の導関数を求めよう. 知りたいのは $dx = \boxed{} dy$ の $\boxed{}$ の中に何が入るか? である. 合成関数のときと同じく微分を考えればよい. $y = f(x)$ の微分は $dy = f'(x)dx$ であるから, $f'(x) \neq 0$ ならば dx について解くことができ,

$$dx = \frac{1}{f'(x)} dy$$

となる. よって, $\boxed{}$ の中に入るものは, $\frac{1}{f'(x)}$ であることが分かった. $f'(x)$ を使わずに書けば,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

である. これが逆関数の微分公式である.

問の解答は manaba にアップする.

manaba 小テストの回答期間:

4月25日(金)の14時55分~4月28日(月)の17時00分まで