

今日の到達目標—指数関数と対数関数—

- (0) 指数関数・対数関数そのものについては、教科書 p.81 ~ p.84 の付録 B を参照せよ。
- (1) e を表す極限式 $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ の捉え方：
- ① $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + \underbrace{+h}_{0 \text{ に近づく}})^{\frac{1}{h}}$ ② 0 に近づく $+h$ の逆数 $\frac{1}{+h}$ が $(1+h)$ の指数部分に来る。
- (2) 指数関数 $y = e^x$ は微分方程式 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ のただ 1 つの解である。この事実により、対数関数の微分公式と積分公式を同時に導けることを理解する。
- (3) 指数関数の底は変換できるから、指数関数の微分公式は 1 つで済む。
- (4) 対数の機能は積を和に直すことである。

4.1 ネイピア数 e の定義と性質

教科書 p.17 の通りであるが、もう少し丁寧に説明する。指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数について考える。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

これにより、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ の値がわかると、 a^x の導関数は定まる。ところで

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = f'(0)$$

であるから、これは、 $f(x) = a^x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きにほかならない。この値を k とおくと

$$(a^x)' = f'(0)a^x = ka^x$$

2 ページの図 4.1 は、 $y = a^x$ のグラフが底 a の値によって変わる様子を示したものである。拡大した図を見ると、点 $(0, 1)$ での接線の傾き k は a の値が大きくなれば、それにともなって大きくなることがわかる。さらに、

$$2.4 < a < 2.8$$

を満たすある値 a について、 k がちょうど 1 になるものがあると考えられる。そのときの a の値を e という記号を使って表し、ネイピア数と呼ぶ。つまり、次の等式が得られる。

$$(e^x)' = e^x$$

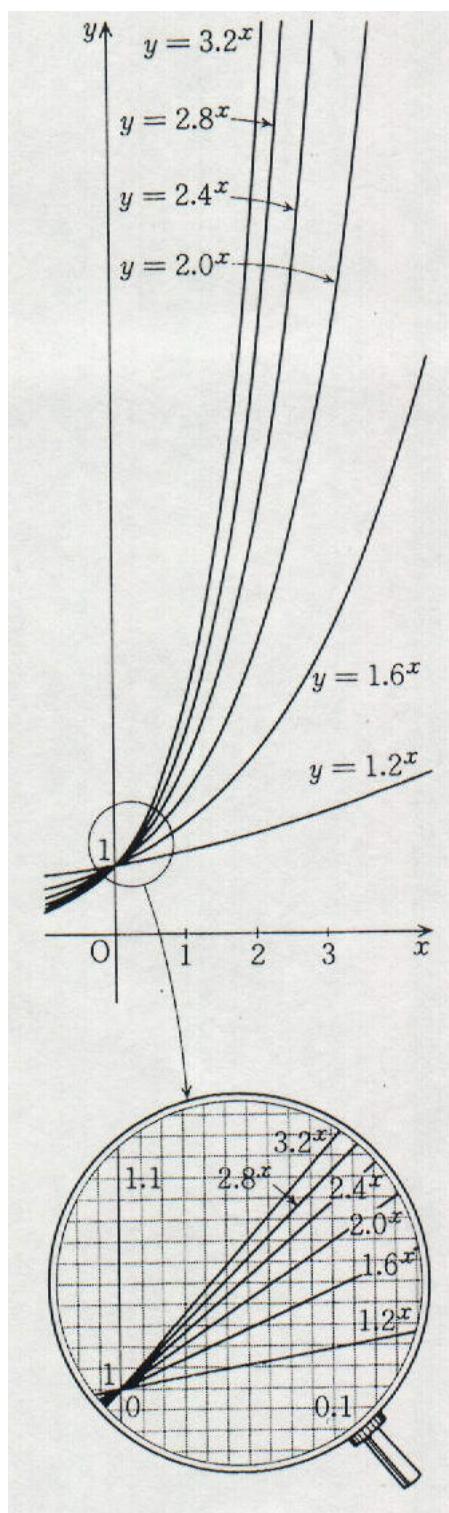


図 4.1 $y = a^x$ のグラフと、点 $(0, 1)$ 付近の拡大図

ネイピア数 e の値について調べてみる. 上の考察から分かるように e は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ を満たす a の値である. すなわち、非常に小さい正の数 h に対して、次のことが言える.

$$\frac{e^h - 1}{h} \doteq 1 \text{ すなわち } e \doteq (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

たとえば, $h = 0.1$ のとき, $e \doteq 1.1^{10} = 2.5937 \dots$ となる. h を $0.01, 0.001, \dots$ とさらに小さくし

ていくと, 下表のように e の近似値が求まる.

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
1	2.0000...
0.1	2.5937...
0.01	2.7048...
0.001	2.7169...
0.0001	2.7181...

図 4.2 e の近似値

$y = f(x) = e^x$ 上の点 (α, β) での接線を l とし, $y = \log_e x$ 上の点 (β, α) での接線を m とおく. この2つの関数は互いに逆関数であるから, l と m も直線 $y = x$ に関して線対称である. $f'(\alpha) = f(\alpha) = \beta$ より l の傾きは β であるから, m の傾きは $\frac{1}{\beta}$ であることが分かる. 特に $\alpha = 0, \beta = 1$ の場合を考えると, ネイピア数の定義 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ は点 $(0, 1)$ での $y = e^x$ の接線 l の傾きが $f'(0) = f(0) = e^0 = 1$ であることを意味する. したがって, 点 $(1, 0)$ における $y = \log_e x$ の接線 m の傾きは $\frac{1}{1} = 1$ となる (図 4.3 参照). すなわち,

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+h) - \log_e 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_e(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

より,

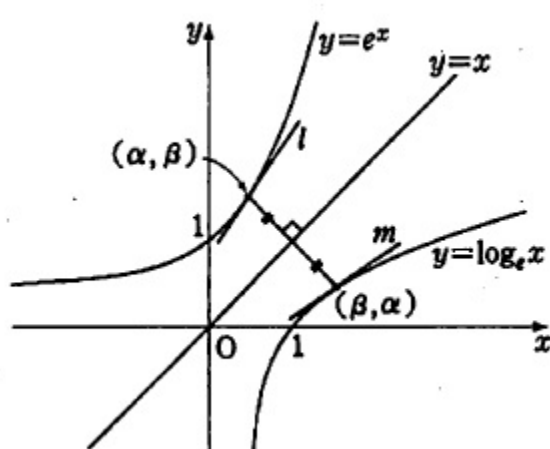


図 4.3 2つの接線 l と m の傾き

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\log_e(1+h)^{\frac{1}{h}}} = e^1 = e$$

となり¹,

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \quad \dots (*)$$

を導くことができた. 以下, この等式の捉え方を身に付ける練習を行う.

¹ $A = e^{\log_e A}$ であるから, $A = (1+h)^{\frac{1}{h}}$ とおけばよい

[問 4.1] (e を表す極限式の捉え方)

次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (5) \lim_{h \rightarrow 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}} \text{ (ただし, } x \neq 0 \text{)}$$

4.3 対数関数の微分公式と積分公式を同時に導く

本資料の 4.1 節で示したように, e^x は $(e^x)' = e^x$ かつ $e^0 = 1$ を満たすから, 指数関数 $y = e^x$ は微分方程式 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ の解である. 指数関数以外にも解があるか否かを調べるために, もうひとつ別の解 $f(x)$ があったと仮定して, $e^{-x}f(x)$ を微分すると, 積の微分公式より

$$(e^{-x}f(x))' = (e^{-x})' \times f(x) + e^{-x} \times f'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f(x) = 0$$

となる. したがって, $e^{-x}f(x)$ は定数関数, すなわち $e^{-x}f(x) = C$ とおける. これに $x = 0$ を代入すると $e^{-0}f(0) = C$, $f(0) = 1$ であるから $C = 1$ を得る. したがって, $e^{-x}f(x) = 1$ となり $f(x) = e^x$ となる. つまり,

指数関数 e^x の特徴

指数関数 $y = e^x$ は微分方程式 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ のただ 1 つの解である.

上記のように, 微分方程式で関数を“定義”するという発想は高校のとき現れなかったもので違和感があるかもしれない. しかし,

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を少し変形すると

$$\frac{dy}{y} = dx, \quad y(0) = 1$$

だから,

$$\int_1^y \frac{dy}{y} = \int_0^x dx = x = \log y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

となり, 「 $\frac{1}{y}$ を積分すれば $\log y$ になる」という積分公式が得られる. さらに $x = \log y$ の両辺の微分を考えると (「微分する」ではない!), $d(\log y) = dx = \frac{dy}{y}$, すなわち

$$\frac{d(\log y)}{dy} = \frac{1}{y} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

となり, 「 $\log y$ を微分すれば $\frac{1}{y}$ になる」という微分公式が得られる. 以上, 述べたことを振り返ると, 微分方程式 $\textcircled{1}$ の解が指数関数 $y = e^x$ であることから出発すれば, 対数関数の微分公式と積

分公式が同時に導けることが分かった。「積分は微分の逆演算」とだけ覚えて、

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log x + C \quad \dots\dots ④$$

の2つを独立に丸暗記していると失敗する可能性がある。微分法と積分法は微分方程式を通じて有機的に結びつくのである。

なお、④は高校で覚えた公式と違う、 $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$, $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$ ではないのか？ という疑問が沸くかもしれない。 $\log |x|$ は $x = 0$ では微分できないので、実際に使う時には

$$\begin{cases} (\log x)' = \frac{1}{x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \times (-x)' = \frac{1}{x} & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。積分公式も同様である。 $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$ と覚えている人が多いだろうが、

$$\begin{cases} \int \frac{1}{x} dx = \log x + C_1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ \int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + C_2 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と別個に考えたほうがよい。

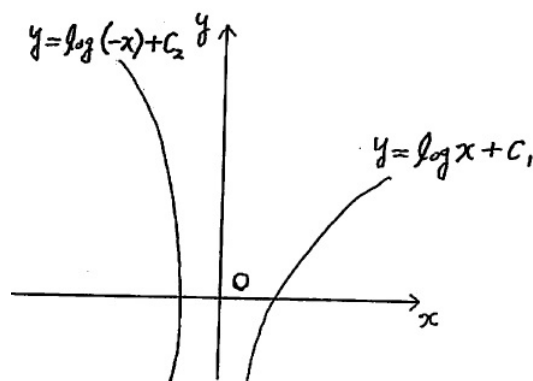


図 4.4 $\frac{1}{x}$ の不定積分

その理由は、たとえば、4 ページの ② 式を見ると分かる。最左辺の積分の上端は $y > 0$ のときしか意味をもたない。分母 = 0 となる所を超えては積分できないので、 $\int_1^{-1} \frac{dy}{y}$ はナンセンスな積分である。もし、初期条件で与えられた y の値が負、たとえば $x = 0$ のとき $y = -3$ ならば、

$$\int_{-1}^y \frac{1}{y} dy = \int_0^x dx, \quad [\log(-y)]_{-1}^y = [x]_0^x, \quad \log(-y) = x, \quad y = -e^x$$

と求まる。このことは「第 2 回 講義資料」3 ページの図 2.3 の傾きの場を観察すれば納得できるだろう。

(Q) 4 ページの ① 式から ②式に変形するとき, y で割り算して積分しているが, $y = 0$ になるときを考えなくて良いのか?

(A) 結論を先に言えば, 「考えなくて良い」である. その理由は以下の通りである. 初期条件 $y(0) = 1$ より, x が 0 に近いとき y の値は 1 に近いので 0 ではない. そこで $y = 0$ とならない y の値の限界を y_0 , 対応する x の値を x_0 とおく (図 4.5 参照).

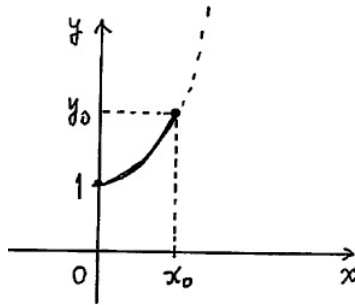


図 4.5 $[0, x_0]$ の範囲では $y = e^x$

① 式の両辺を y で割って, $y = 1$ から $y = y_0$ でない範囲で積分すると,

$$\int_1^{y_0} \frac{1}{y} dy = \int_0^{x_0} dx, \quad [\log y]_1^{y_0} = [x]_0^{x_0} \quad \log y_0 - \log 1 = x_0 - 0, \quad \log y_0 = x_0, \quad y_0 = e^{x_0}$$

が得られる. 図 4.5 の実線部分のグラフはもちろん $y = e^x$ である. 問題は点 (x_0, y_0) からその先のグラフが $y = e^x$ でない可能性があるか? となるが, それはあり得ない. なぜならば, $x = 0$ のとき $y = 1$ を初期条件とする微分方程式 $\frac{dy}{dx} = x$ の解は $y = e^x$ しかないからである. このように, 解がただ 1 つであることが予め分かっている微分方程式では, 初期条件 $y(0) > 0$ から出発したとき x が変化しても y は決して 0 にはならない. (回答終了)

4.4 微分への対数の利用

微積分学における対数の役割の 1 つは, 積を和に直すことである. 微積分の計算は積よりも和のほうが簡単だからである.

重要な例. 実数 α に対して, 関数 $y = x^\alpha$ の導関数を対数を用いる方法で導いて見よう. ただし, $x > 0$ とする². まず, この式の両辺の対数をとると

$$\log y = \log(x^\alpha) = \alpha \log x$$

この両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}.$$

よって

$$y' = \alpha \cdot \frac{y}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

² $x < 0$ のとき, 一般に x^α は複素数になり, 1 つの値に決まらない. たとえば, $(-1)^{\frac{1}{2}}$ を考えると 2 乗して -1 になる数は 2 つあり, i と $-i$ である.

したがって、実数 α に対して、次の等式が導かれる.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

関数 x^α と指数関数 a^x (ただし, $a > 0$) を混同しないように!

[問 4.2] (対数微分法)

対数を用いて, $y = a^x$ の導関数を求めよ.

問の解答は manaba にアップする.

manaba 小テストの回答期間:

5月2日(金)の14時55分~5月7日(水)の17時00分まで

GW を挟むので、提出期限は変則的であることに注意

解答が終了しても「提出確定」のボタンを押し忘れると、0点となる!

「提出確定」のボタンを押した後は、解答の修正はできない.