

今日の到達目標—三角関数と逆三角関数—

- (0) 三角関数の微積分では弧度法を使う。
- (1) $\theta \doteq 0$ のとき, $\sin \theta \doteq \theta$ の近似式が成り立つ。(理工系の分野で頻繁に利用される近似式の1つである.)
- (4) 逆三角関数の定義 (角度の範囲に注意する) とその導関数が計算できる。

5.1 三角関数の微分

三角関数の微積分を考えると、角の単位はラジアンを用いるのが約束である。簡単にラジアン
の復習をする (詳細な説明は、教科書 p.75 の付録 A に書かれている.)。線分 OA があるとき、OA
を O を中心に正の向きに回転し、OA が OP に移動したとき、点 A の移動距離 AP と回転角 $\angle$
AOP は比例している。そこで、 $\angle$ AOP を

$$x = \frac{\widehat{AP}}{OA}$$

で表す表し方を弧度法 (弧の長さで角度を表す方法) といい、「回転角 $\angle$ AOP は x である、ある
いは x ラジアンである」という。(反対回転の場合は負の角である.)

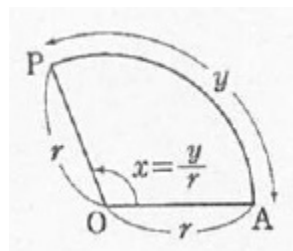
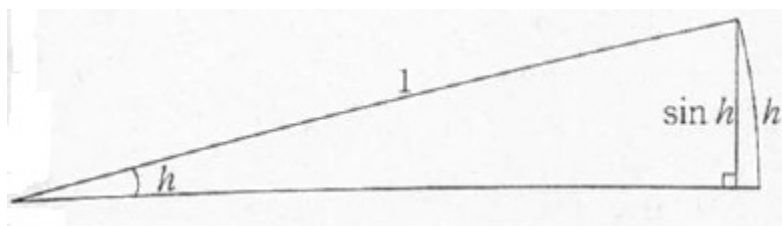


図 5.1 円弧 OAP

$x = \frac{\widehat{AP}}{OA}$ は $\frac{\text{長さ}}{\text{長さ}}$ なので、本当は単なる実数にすぎず、ラジアンというのは、その実数が角を表
すことを強調しているだけにすぎない。180° は $\frac{\pi r}{r} = \pi$ ラジアンなので、1 ラジアン = $\frac{180^\circ}{\pi} =$
57.295779...° となる。

三角関数に関する極限公式 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ は、 h の値が小さければ、 $\sin h$ と h の比は 1 に近づく
ことを主張した式であるが、このことは図 5.2 のように十分小さな h についての弧の長さは $\sin h$
とほとんど等しくなることからわかる。

図 5.2 $\sin h \doteq h$

実際, t と $\sin t$ の値を表にすると図 5.3 のようになっている. t が 60° 分法で 10° くらいの角もラジアンではすでに $\sin t$ とかなり近いことがわかる.

t ラジアン (度)	$\sin t$
0.17453 (10°)	0.17365
0.08727 (5°)	0.08716
0.05236 (3°)	0.05234
0.03491 (2°)	0.03490
0.01745 (1°)	0.01745

図 5.3 度とラジアン

教科書 p.21 では, $\sin(x+h)$ に加法定理を適用して, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ を計算しているが, それなりの手間がかかる. やや技巧的だが,

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin \left\{ \left(x + \frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \right\} - \sin \left\{ \left(x + \frac{h}{2} \right) - \frac{h}{2} \right\}$$

と変形した後に, 加法定理を適用して極限を計算すると簡単である. (各自, 実行せよ. 解答は「問の答」のファイルに記述する.)

授業中に述べたように, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$ も同様の手法で計算できるので, 追加しておく.

ここでは、微分の精神である“曲線は局所的には直線とみなせる”ことを使って直観的に説明しよう。単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ の θ を $d\theta (> 0)$ だけ進ませるとき、 x, y それぞれの微小変化量 dx, dy を考える (図 5.4)。

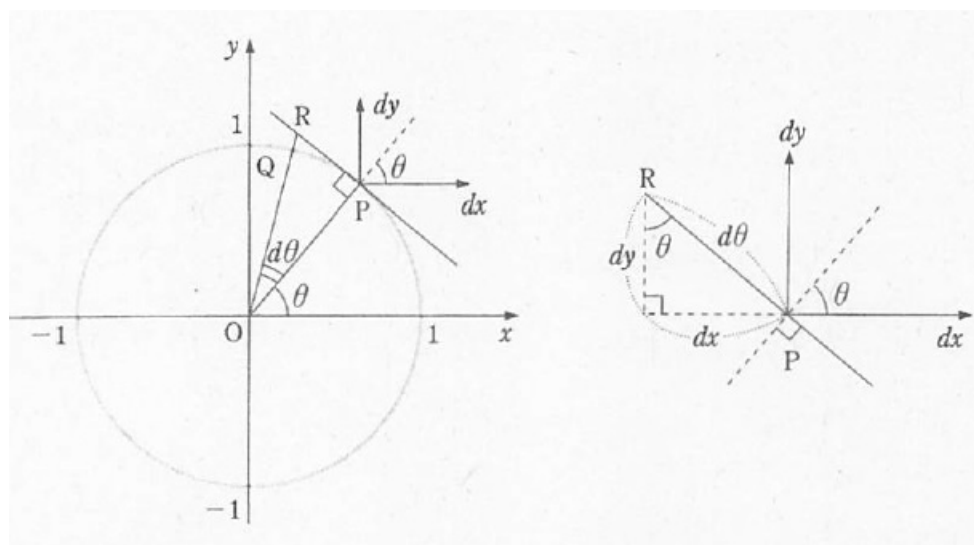


図 5.4 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の微分

$d\theta$ が非常に小さければ、弧 PQ の長さ $d\theta$ は線分 PR の長さに等しいとみてよく、さらに $dx < 0, dy > 0$ を考慮すると、

$$d\theta \sin \theta = -dx = -d(\cos \theta), \quad d\theta \cos \theta = dy = d(\sin \theta).$$

すなわち、

$$\frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta, \quad \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = \cos \theta$$

を得る。

視覚に訴える方法も述べておこう。 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ のグラフを思い浮かべれば、 $f'(x), g'(x)$ は予想できる。 $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$ であるが、どっちが + で、どっちが - だったか覚えようとしていないだろうか？ $f'(x)$ は「 $f(x)$ の傾きのグラフ」であるから

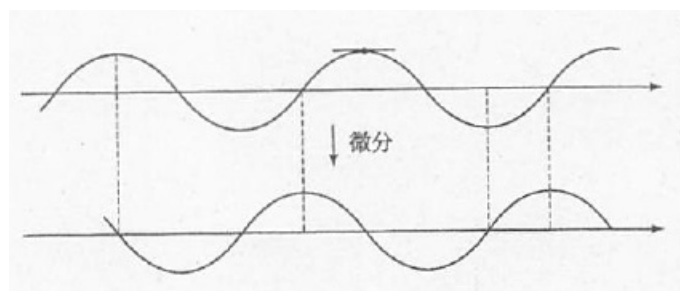


図 5.5 $f'(x)$ は $f(x)$ の傾きのグラフ

$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$ とグラフから容易に推定できる。 $(\tan x)'$ は教科書 p.21 の問 5.1.1 にあるので、一度も計算したことがない人はやってみよう。

[問 5.1] (導関数の計算)

次を計算せよ.

(1) $(\sin 2x)'$ (2) $(\cos^3 x)'$ (3) $(\sin^3 2x)'$

5.2 逆三角関数の定義と性質

逆三角関数とは, 文字通り, 三角関数の逆関数である. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ の逆関数をそれぞれ, $y = \sin^{-1} x$, $y = \cos^{-1} x$, $y = \tan^{-1} x$ と表す¹.

$y = \sin x$ のグラフを単純に直線 $y = x$ に関して対称に折り返すと, 図 5.6 のようになる.

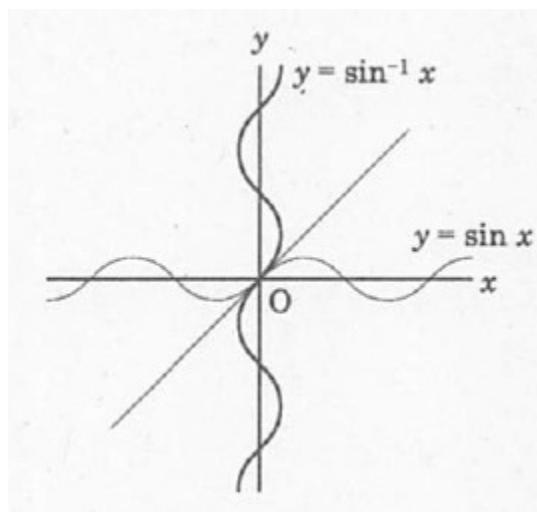


図 5.6 $y = \sin x$ と $y = \sin^{-1} x$ のグラフ

そうすると $y = \sin^{-1} x$ は $-1 \leq x \leq 1$ を満たす x に対して, 無数の y が対応することになって関数とは呼べなくなる. そこで, 折り返す前の $\sin x$ の角 x の範囲を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限する. そうすると, $y = \sin^{-1} x$ の y は $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲でただ 1 つに決まる. こうして $y = \sin^{-1} x$ のグラフは教科書 p.22 の図のようになる. $y = \cos^{-1} x$, $y = \tan^{-1} x$ についても同様に, 関数の値域はそれぞれ, $0 \leq y \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ となる. この角の範囲は定義なので覚える必要がある.

教科書 p.24 の問題 5.2 を各自で解いてみよう (解答は p.99).

5.3 逆三角関数の微分

教科書 p.23 の定理 5.3.1 として書かれている. 証明も逆関数の微分公式を使うしかない. 自力で導けるか? トライせよ. まずは, $(\tan^{-1} x)'$ と $(\sin^{-1} x)'$ を計算せよ.

¹ $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ はそれぞれ, 「アークサインエックス」, 「アークコサインエックス」, 「アークタンジェントエックス」と読む, と教科書 p.22 の脚注に書かれているが, 私個人の意見は, 逆を表す英語 inverse を使って, 「サインインバースエックス」, 「コサインインバースエックス」, 「タンジェントインバースエックス」と読むのが適切と思う. それから, $\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$ ではないことに注意する. $\sin x$ の 2 乗を $\sin^2 x$ と表すことと整合性が取れないが致し方ない. $\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数を表すひとまとまりの記号であり, 特別ルールと理解しておく. $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ についても同様である.

ただし, 下のグラフから, $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ という恒等式が成り立つので (なぜか ?, 理由説明は「問の答」のファイルに記載するが, まずは自分で考えてみよう), これを利用すると, $(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を示すことができる.

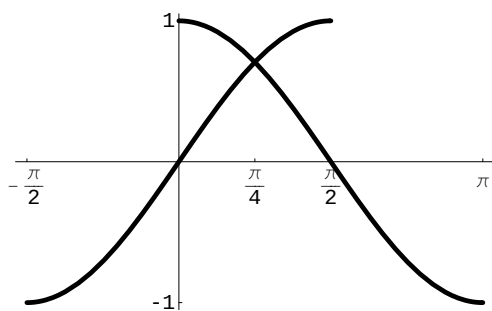


図 5.5 $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

教科書 p.24 の問題 5.3 を各自でやってみよう (解答は p.99).

問の解答は manaba にアップする.

manaba 小テストの回答期間：

5月16日(金)の14時55分～5月19日(月)の17時00分まで