微積分学　第 6 回　講義資料

今日の到達目標

(1) $\dfrac{0}{0}$ 型の極限を求めるための便利な方法として, ロピタルの定理がある. ロピタルの定理の図形的な意味を把握する.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の極限は分母, 分子が無限大になる速さで決まる. ロピタルの定理は $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の極限にも適用できる.

(3) 関数 $f(x)$ の極値を求めるとき, $f'(x)=0$ を解くことよりも $f'(x)=0$ となる x の前後で $f'(x)$ の符号変化をチェックすることが大事である. グラフの凹凸についても同様である. $f'''(x)=0$ を解くだけでは変曲点とはいえない. $f''(x)=0$ の解の前後で符号変化することを調べることが必要である.

内容盛りだくさんなので, 教科書の順番とは変えて, p.29 の「6.4 不定形の極限」から説明する.

6.4 不定形の極限

不定形の極限とは, 形だけでは定まらない極限のことで極限値が求まらないという意味ではない. $\dfrac{0}{0}$ あるいは $\dfrac{\infty}{\infty}$ が不定形の極限の代表的な例であるが, 実際にこのような分数は存在しない. 0 を分母にもって来ることはできないし, ∞ は数ではないからである.

$$\frac{(0\text{ に近づく})}{(0\text{ に近づく})},\quad \frac{(\infty\text{ に近づく})}{(\infty\text{ に近づく})}$$

のように書けば, 誤解を防げるかもしれないが, 長ったらしいので, この講義資料では,

$$\frac{0}{0}\text{ 型の極限},\ \frac{\infty}{\infty}\text{ 型の極限}$$

と呼ぶことにする.

まずは, $\dfrac{0}{0}$ 型の極限の例として, 教科書 p.29 の例題 6.4.1 ：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

を考える.

まず, 手順だけを示すと下の赤字部分のようになる．求めたいのは緑で囲んだ分数の極限であるが, これが空色で囲んだ分数の極限と等しくなる．これがロピタルの定理である．空色で囲んだ分数 $\dfrac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'}$ は商の導関数 $\left(\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)'$ と等しくないことに注意せよ！

$$\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{1-\cos x}{\sin x}} = \frac{Y}{X} \text{ とおく}$$

$\frac{0}{0}$ 型の極限だから，ロピタルの定理を適用して，

$$= \lim_{x\to 0}\boxed{\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = \underline{0} \;/\!/$$

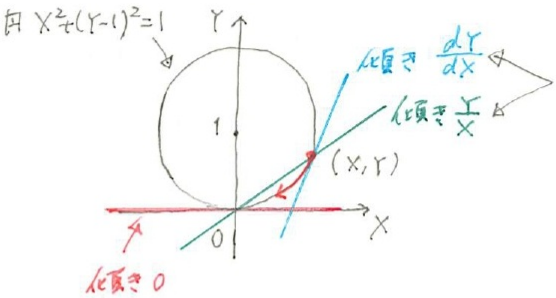
$$\boxed{\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'}} = \frac{dY}{dX}$$

となる.

幾何学的な解釈

$\sin x = X$, $1-\cos x = Y$ とおくと, $-\cos x = Y-1$ より

$(\sin x)^2 + (-\cos x)^2 = X^2 + (Y-1)^2 = 1$ となる.



$x \to 0$ のとき, $X \to 0$, $Y \to 0$ であり,

この2つは，同じ値に収束する.

$$\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{Y}{X}} = \lim_{x\to 0}\boxed{\frac{dY}{dX}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'}$$

ロピタルの定理を一般的に証明するのは難しい[1]．ロピタルの定理は $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の極限にも適用できるが, いずれもその幾何学的意味を述べるに留める．

[1]教科書 p.29 の定理 6.4.1 はロピタルの定理の特殊な一例に過ぎない．p.29 の脚注も参照せよ．

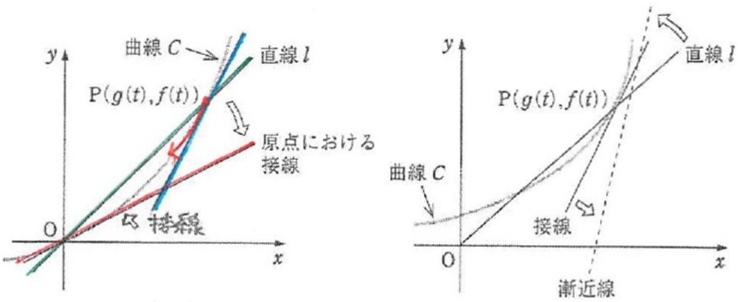
パラメータ t で表される曲線 $C:\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases}$ 上の点 P $(g(t), f(t))$ と原点 O を結ぶ直線 l の傾き, および点 P における曲線 C の接線の傾きに注目する.

- $\dfrac{0}{0}$ 型の極限： $g'(t) \neq 0$, $\displaystyle\lim_{t\to a} f(t) = \lim_{t\to a} g(t) = 0$ のとき, 原点 O は曲線 C 上にあるから,

$$\lim_{t\to a} \underbrace{\frac{f(t)}{g(t)}}_{\text{直線 } l \text{ の傾き}} = \lim_{t\to a} \underbrace{\frac{f'(t)}{g'(t)}}_{\text{点 P における接線の傾き}} = (\text{原点 O における接線の傾き}).$$

- $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の極限： $\displaystyle\lim_{t\to a} f(t) = \lim_{t\to a} g(t) = \infty$ のとき,

$$\lim_{t\to a} \underbrace{\frac{f(t)}{g(t)}}_{\text{直線 } l \text{ の傾き}} = \lim_{t\to a} \underbrace{\frac{f'(t)}{g'(t)}}_{\text{点 P における接線の傾き}} = (\text{漸近線の傾き}).$$



$\dfrac{0}{0}$ 型 $\qquad$ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

例題 6.4.1 とその解答が理解できたら, 教科書 p.30 の問題 6.5 をやってみよう.

[問 6.1] (無限大のオーダーの比較)

(1) 下表の空欄を埋めよ.

x	10	100	1000	10000	$\cdots$
x^2					$\cdots$
10^x					$\cdots$
$\log_{10} x$					$\cdots$

(2) 次の極限を求めよ. (i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{10^x}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log_{10} x}{x}$

[問 6.2] (関数の最大・最小)

関数 $f(x) = -x - 1 + \sqrt{4x+1}$ $(x \geqq 0)$ の最大・最小を調べよ.

[問 6.3] (曲線の凹凸)

曲線 $f(x) = \sin x + \cos x$ $(0 < x < 2\pi)$ の変曲点の座標および凹凸を調べよ.

問の解答は manaba にアップする.

manaba 小テストの回答期間：

5 月 23 日 (金) の 14 時 55 分〜5 月 26 日 (月) の 17 時 00 分まで