微積分学　第 7 回　講義資料

到達目標–テイラー展開の特徴とその使いみち

(1)　テイラー展開とは関数を無限級数の形で表す技法であり, その表現式の特徴を掴むことを最初に身に付ける.

(2)　その表現式がどのように役に立つのか (使いみち) を知る.

テイラー展開の使いみちは, 主として近似式としての利用および数値計算である.

今学期で最も難しい内容であるため, 教科書の記述とは大幅に順番を変えて説明する. 今日と次回の授業で, 教科書第 7 章と第 8 章の内容をカバーするので, その点は安心してほしい.

7.1　テイラー展開とは何か ?

テイラー展開とは何か ? 結論を最初に述べよう.

テイラー展開の特徴

- テイラー展開という言葉の前に 「$x = a$ の近くで」とか「$x = a$ における」あるいは「$x = a$ を中心とする」という修飾語がつく.
- $x - a$ がひとかたまりになって, その累乗の定数倍の無限和になっている.

$x = a$ の近くでの関数 $f(x)$ のテイラー展開とは, $f(x)$ を ① の右辺のように表すことである.

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n + \cdots \quad \cdots\cdots \quad ①$$

定数の列 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ は $f(x)$ からただ 1 つに決まる. 具体的には以下の手続きを行う.

まず, ① に $x = a$ を代入すれば, $A_0 = f(a)$ となる. $A_1, A_2, \cdots$ は, ①を 1 回, 2 回, $\cdots$ と微分して得られる式に, 逐次 $x = a$ を代入すれば求まる：

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + 4A_4(x-a)^3 + \cdots \xrightarrow{x=a\text{ を代入}} A_1 = f'(a)$$

$$f''(x) = 2A_2 + 3\cdot 2A_3(x-a) + 4\cdot 3A_4(x-a)^2 + \cdots \xrightarrow{x=a\text{ を代入}} A_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2A_3 + 4\cdot 3\cdot 2A_4(x-a) + \cdots \xrightarrow{x=a\text{ を代入}} A_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

の操作を続ければ, $A_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ であることがわかり, これらを ① に代入すれば,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \quad \cdots\cdots \quad ②$$

を得る. ② が $x = a$ の近くでの関数 $f(x)$ のテイラー展開であるが, これを丸暗記してはいけない. 前提となる出発点は ① 式であり, ① の右辺に上記の「テイラー展開の特徴」がすべて含まれていることに着目すべきである. これがテイラー展開を克服するコツでもある (と私は考えている).

では, 早速, ここまでの理解度をチェックするために問を作成したので, 各自で取り組んでみよう.

[問 7.1] (具体的な関数のテイラー展開)

以下の各問に答えよ.

(1) $x = 1$ の近くで, 関数 x^3 をテイラー展開せよ.

(2) 関数 e^x のマクローリン展開を求めよ. (p.33 の例題 7.2.2)

(3) 関数 $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ. (p.33 の問 7.2.1)

(4) (3) の結果を利用して, 関数 $\cos x$ のマクローリン展開を求めよ. (p.33 の問 7.2.1)

(5) (2), (3), (4) の結果を利用して, オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を導け. (p.35 の「第 7 章の補足」)

言い忘れたが, 関数 $f(x)$ のマクローリン展開とは $x = 0$ の近くでのテイラー展開のことである. したがって, マクローリン展開という言葉の前に「... の近くで」のような修飾語は付かない. テイラー展開は修飾語が必ず付く. この区別も最初に覚えておくこと. なお, テイラーはマクローリンに帰着できる. この文言は私の授業だけで通じる用語である. どういう意味かは上の問 7.1 (1) の解答の際に説明する.

ネイピア数 e の数値計算を載せておく.

n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	$1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$
1	2.00	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166
6	2.522	2.71805
7	2.546	2.718253
8	2.566	2.7182787
9	2.581	2.71828512
10	2.594	2.718281801
11	2.604	2.7182818261
12	2.613	2.71828182828
13	2.621	2.718281828446
14	2.627	2.7182818284582
15	2.633	2.71828182845899
16	2.638	2.718281828459022
17	2.642	2.7182818284590 4507
18	2.646	2.7182818284590 45226
19	2.650	2.71828182845904 52349
20	2.653	2.718281828459045235339

上表から分かることは2つの極限の収束の速さが顕著に異なることである．$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の極限 (右辺を見て左辺になることがすぐに分かるか?) の収束は非常に遅い．たとえば, $n = 20$ のとき, すなわち $\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20} = 2.653$ で小数第1位すら正しくない．それに対して, マクローリン展開の場合は, $n = 7$ のとき, すなわち $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{7!} = 2.7182...$ で小数第4位まで正しい数値になっている．つまり, 無限級数 $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ の収束は早い．e^x のマクローリン展開が, e の数値計算に役立つことが分かる．

最後に無限級数についての理解度を確認する．項 a_n がすべて正である数列の無限に続く和

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

に関して, 直観的にどう思うか．次の中から選べ．

(A) 正の数をどんどん足すから, 必ず発散すると思う．

(B) どんなに正の数を加えても足した結果が, ある定数を超えられない場合は収束すると思う．

本当は時間をかけて考えてから, 答えてほしい問である．事実だけを述べれば, (A) の「発散する」ケースはあるが, 「必ず発散する」と言っているので (A) は誤りである．(B) は正しい．その典型的な例は, 君たちになじみのある等比数列の無限につづく和

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

である．このことを確認してみよう．① のように, 無限に続く和のことを, 無限級数または単に級数と呼ぶ．もし, ① を順に計算していこうとするといつまで計算しても終わらない[1]．そこで, 一般に級数 ① において, まず有限個の和 (これを部分和という)

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を求め, それを順に並べた数列

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

を考える．そして, 数列 S_n が S に収束するとき, S を級数 ① の和と定義する．等比級数 ② の場合は,

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

であるから[2],

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

[1] この認識が大事！無限個の数を足すことを定義しなければいけない！

[2] 等比数列の和の公式 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ を使っている．私は公式として覚えておらず, いつも $(1-r)(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})$ を展開して $1-r^n$ になることを計算して, この公式を導いているが皆さんはどうだろうか？

となり, 和は 2 である. こうして, どんな整数 n に対しても $S_n < 2$ が成り立ち, S_n は 2 を超えられないことが分かった. なお, 級数 ① は, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とも表す. そして, 級数 ① の和が S であるとき,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S \quad \text{または} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

と書き, 級数 ① は S に収束するという. また, 数列 S_n が発散するとき, すなわち和をもたないときは, 級数 ① は発散するという. 級数が発散する例は, 等比数列の公比 r が $|r| \geqq 1$ を満たすときである. 一般に正の項からなる級数は有限の極限値があるか, 無限大に発散するか, のどちらかである.

テイラー展開も無限級数なので, その収束・発散を調べる必要がある. それは次回の授業で説明する.

問の解答は manaba にアップする.

manaba 小テストの回答期間：

5 月 30 日 (金) の 14 時 55 分〜6 月 2 日 (月) の 17 時 00 分まで