1　集合と写像, 述語記号

• 1-1 : 命題の必要条件, 十分条件

2 つの条件 P, Q に対して, 命題「P ならば Q」が真であるとき, このような命題を「$P \Longrightarrow Q$」で表す. このとき, P は Q であるための**十分条件**といい, Q は P であるための**必要条件**であるという. 必要条件かつ十分条件であるような条件を**必要十分条件**と呼ぶ. 命題「$P \Longrightarrow Q$」かつ命題「$Q \Longrightarrow P$」であるとき, これを「$P \Longleftrightarrow Q$」で表す. このとき, P と Q は**同値**であるという.

• 1-2 : 全称記号 ∀ と存在記号 ∃

いろいろな命題を簡略化して述べるために, 次のような記号を導入すると大変便利である.

- 「集合 A の**任意の**元 $a \in A$ は条件 $P(a)$ を満たす」ことを「$\forall\, a \in A,\ P(a)$」と書く. 記号 ∀ は「すべての」という意味の記号である.
- 「集合 A の元 $a \in A$ で, 条件 $P(a)$ を**満たすものがある**」ことを,「$\exists\, a \in A$ (s.t.) $P(a)$」と書く. ここで, (s.t.) は such that の省略形である. 記号 ∃ は「ある」「存在する」の意味の記号である.

例 1-1　(1) 任意の自然数 n に対して, n^2 も自然数である. これを上記の記号を用いて書くと, 以下の通り.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \in \mathbb{N}$$

(2) 任意の自然数 n に対して, $n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在する. これを上記の記号を用いて書くと, 以下の通り.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N} \quad \text{(s.t.)} \quad p \text{ は素数で } n < p \leq 2n$$

レポート 1-1　次の命題の真偽について, それぞれ判定せよ.

- $\forall x > 0,\ \exists y \in \mathbb{R}$ (s.t.) $xy \geq 1$.
- $\exists x \in \mathbb{R}$ (s.t.) $\forall y > 0,\ x > y$.

• 1-3 : 集合の記号

条件がはっきりとしているようなものの集まりを**集合**といい, このとき集められている 1 つ 1 つのものを**元**または**要素**という. 「条件がはっきりしている」というのは, 集合の元であるという条件がきっちりと明示されているということである. 集合を表す記号を表にまとめておこう. 以下の表では A と B は集合とする.

記号	日本語	意味
$a \in A$	a は集合 A に属する	a は集合 A の元である.
$a \notin A$	a は集合 A に属さない	a は集合 A の元ではない.
$A \subset B$	A は B の部分集合	A の元はすべて B にも属している.
$A \not\subset B$	A は B の部分集合ではない	$A \subset B$ ではない.
$A \subseteq B$	A は B の部分集合, または $A = B$	$A \subset B$ もしくは $A = B$ のいずれかである.
$A \subsetneq B$	A は B の真の部分集合	$A \subset B$ かつ $A \neq B$ である.
$\varnothing$	空集合	元がひとつもない集合
$A \cap B$	A と B の共通部分	A と B の両方に属するもの全体の集合
$A \cup B$	A と B 和集合	A と B の少なくとも一方には属するもの全体の集合
$\overline{A}$	A の補集合	全体集合 U のうち, A に属さないもの全体の集合

数学では, 特別な集合に対してはそれを表す記号が用意されており, 本講義でも用いるので紹介しておく.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ = 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$ = 整数全体の集合
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$ = 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$ = 実数全体の集合
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i$ は虚数単位$\}$ 複素数全体の集合

これらの記号を実際に板書するときは, 原則としてアルファベットの左側を二重線などで書き表すことが多い.

- **1-4 : 集合の演算**

2 つの空でない集合 A, B が与えられたとき, A の元 a と B の元 b の組 (a, b) の全体を $A \times B$ 考えることができる.

$$A \times B = \Big\{ (a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B \Big\}$$

これを A と B の **直積集合** という. A もしくは B が空集合のときは $A \times B$ も空集合と約束する. また, $A = B$ のときは $A \times B$ を A^2 とかく. 同様にして帰納的に A^n を

$$A^n = A^{n-1} \times A$$

と定義する.

例 1-2　実数 $\mathbb{R}$ の直積集合 $\mathbb{R}^2$ は平面を表し, $\mathbb{R}^3$ は 3 次元空間を表す.

集合を元とするような集合のことを **集合族** という. 集合族の代表的な例は冪集合である. 集合 A に対して, その部分集合全体からなる集合を A の **冪集合** といい, 記号で $P(A)$ や 2^A などとかく. 集合 A が n 個の元からなる場合, 2^A は 2^n 個の元からなる.

例 1-3　$A = \Big\{1,\ 2,\ 3\Big\}$ のときは

$$2^A = \Big\{ \varnothing,\ \Big\{1\Big\},\ \Big\{2\Big\},\ \Big\{3\Big\},\ \Big\{1,\ 2\Big\},\ \Big\{1,\ 3\Big\},\ \Big\{2,\ 3\Big\},\ \Big\{1,\ 2,\ 3\Big\} \Big\}$$

である.

集合族 $\mathcal{S}$ に対して, その共通部分 $\displaystyle\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$ と和集合 $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$ が次のように定義される.

$$\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \Big\{ x \mid \text{すべての } A \in \mathcal{S} \text{ に対して, } x \in A \Big\}, \quad \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \Big\{ x \mid \text{ある } A \in \mathcal{S} \text{ に対して, } x \in A \Big\}$$

$\mathcal{S} = \Big\{ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \Big\}$ のときは,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \qquad \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

などとかく. $\mathcal{S} = \Big\{ A_n \mid n \in \mathbb{N} \Big\}$ のときは, $\displaystyle\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ とかく.

- **1-5 : 集合の相当**

2 つの空でない集合 A, B に対して, $A = B$ を示すには $A \subset B$, $B \subset A$ の両方を示せばよい.

例 1-4　$A = \left\{3m + 5n \mid m,\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ と $\mathbb{Z}$ は集合として等しい. 実際, $A \subset \mathbb{Z}$ は自明だから $\mathbb{Z} \subset A$ を示せば良い. 任意の $r \in \mathbb{Z}$ をとると

$$r = 3 \times 2r + 5 \times (-r)$$

と表せるので $r \in A$ である. よって $A = \mathbb{Z}$ が示された.

例 1-5　3 つの集合 A, B, C に対して,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成り立つ.

一つ目の等号を示そう. 任意に $x \in A \cap (B \cup C)$ をとれば, $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$ である. $x \in B \cup C$ より $x \in B$ または $x \in C$ の少なくとも一方が成り立つ. つまり,「$x \in A$ かつ $x \in B$」または「$x \in A$ かつ $x \in C$」のいずれかが成り立つ. これは $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ である. すなわち, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ である. 以上より $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が示された.

$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示そう. 任意に $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ をとると,「$x \in A \cap B$」または「$x \in A \cap C$」が成り立つ. いずれにしても $x \in A$ が成り立つ. $x \in A \cap B$ なら $x \in B$ であり, $x \in A \cap C$ なら $x \in C$ である. よって $x \in A \cap (B \cup C)$ が成り立つ. 以上より $A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が示された.

• 1-6 : de Morgan の法則

集合 X とその部分集合 A に対して, $X \setminus A$ を

$$X \setminus A = \left\{x \in X \mid x \notin A\right\}$$

とおき, これを X から A への **差集合** と呼ぶ. 次の集合に関する等号を **de Morgan の法則** と呼ぶ.

定理 1.1 (de Morgan の法則)**.** 集合 X とその部分集合 A, B に対して次が成り立つ.

(1) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
(2) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

証明. (1) $X \setminus (A \cap B) \subset (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ および $X \setminus (A \cap B) \supset (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ のふたつを示せば良い.

任意に $x \in X \setminus (A \cap B)$ をとれば $x \in X$ かつ $x \notin A \cap B$ である. ここで, $x \in X$ に対して

$$x \notin A \cap B \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin A \text{ または } x \notin B$$

である. $x \notin A$ なら $x \in X \setminus A$ であり, $x \notin B$ なら $x \in X \setminus B$ である. 従って $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ が成り立つので $X \setminus (A \cap B) \subset (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ である.

次に任意に $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ を任意にとる. このとき, $x \in X \setminus A$ または $x \in X \setminus B$ である. 前者の場合は $x \notin A$ であり, 後者の場合は $x \notin B$ である. つまり, $x \notin A \cap B$ が成り立つ. 従って $x \in X \setminus (A \cap B)$ が成り立つので $X \setminus (A \cap B) \supset (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ である.

以上で $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ が示された. □

レポート 1-2　de Morgan の法則の (2) を証明せよ.

• 1-7 : 写像

空でないような 2 つの集合 A, B に対して, A に属する各々の元に対して B の元をただ一つずつ対応させる規則を A から B への **写像** という. f が A から B への写像であることを

$$f : A \longrightarrow B$$

のようにかく．写像 f によって，$a \in A$ が $b \in B$ に対応するとき，a は f によって b に **写される** という．このとき b を $f(a)$ で表し，$f(a)$ を a の f による **像** という．写像 $f : X \longrightarrow Y$ および $g : Y \longrightarrow Z$ が与えられたとき，$x \in X$ に対して $g(f(x)) \in Z$ を対応させることにより，新たな写像を定義できる．これを $g \circ f : X \longrightarrow Z$ と表し，f と g の **合成写像** という．

写像 $f : A \longrightarrow B$ が **単射** または **1:1** であるとは，A の異なる 2 つの元が f によって B の異なる 2 つの元に写されるときをいう．すなわち，

$$\forall x, y \in A, \quad x \neq x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(x')$$

が成り立つときをいう．これの対偶をとれば，「$\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$」である．

写像 $f : A \longrightarrow B$ が **全射** または **上への写像** であるとは，B に属するどの元も A に属するある元の f による像となっているときをいう．すなわち，

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A \quad (\text{s.t.}) \quad y = f(x)$$

が成り立つときをいう．

写像 $f : A \longrightarrow B$ が単射かつ全射であるとき **全単射** という．

例 1-5　(1) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める．これは $f(1) = f(-1) = 1$ だから単射はない．また，$f(x) = -1$ となるような $x \in \mathbb{R}$ は存在しないの全射でもない．

(2) 写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $f(n) = 3n$ で定義する．$n \neq m$ のとき，$3n \neq 3m$ だから f は単射である．また，$f(n) = 1$ となるような $n \in \mathbb{Z}$ は存在しないので f は全射ではない．

(3) 写像 $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \tan x$ で定義すると，グラフを書けばわかる通り全単射である．

(4) 集合 X に対して，写像 $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ を $\mathrm{id}_X(x) = x$ と定めたものを X 上の **恒等写像** という．

全単射な写像 $f : A \longrightarrow B$ があったとする．このとき，f は全射だから任意の $y \in B$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する．f は単射であるから $y = f(x)$ となるような x はただひとつに定まる．そこで写像 $g : B \longrightarrow A$ を $y \in B$ に対して $y = f(x)$ となるような $x \in A$ をとり $g(y) = x$ と定義することができる．このように定義した写像 g を f の **逆写像** といい，f^{-1} で表す．f^{-1} は「エフインバース」と読む．

命題 1.2. 写像 $f : A \to B$ に対して，f が全単射であることと，ある写像 $g : B \to A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_A$ および $f \circ g = \mathrm{id}_B$ が成り立つことは同値である．

証明. **（必要条件）：** f を全単射とすると f の逆写像 $f^{-1} : B \to A$ が存在する．このとき，逆写像の定義より $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ であり $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ である．

（十分条件）： f が単射であることを示す．まず，$x, x' \in A$ で $f(x) = f(x')$ あると仮定する．これの両辺を g で写すと

$$g(f(x)) = g(f(x')) \quad \Longrightarrow \quad g \circ f(x) = g \circ f(x') \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{id}_A(x) = \mathrm{id}_A(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'$$

が従う．よって f は単射である．

f が全射であることを示す．任意に $y \in B$ をとれば，$y = \mathrm{id}_B(y) = f \circ g(y) = f(g(y))$ である．これは y が $g(y)$ の f による像であることを意味するので f は全射である．□

レポート 1-3　次の主張を証明せよ．

(1) 写像 $f : A \to B$ および $g : B \to C$ に対して，合成 $g \circ f$ が全単射であるとき，f は単射であり，g は全射である．

(2) 写像 f の逆写像 f^{-1} も全単射である．