5 準同型定理

- **5-1：群準同型写像**

2 つの群 G と G' があったとき, これらが本質的に同じ群であるか, あるいはこの 2 つの群には関係があるのかを定式化するために, 群準同型写像という概念を定義する. 2 つの群を比べるので, G_1 に備わっている積と G_2 に備わっている積がきちんと対応している状況を考えることは自然である.

定義 5.1. 2 つの群 G_1 と G_2 を考える. G_1 の積を $*_1$, G_2 の積を $*_2$ とする. 写像 $f : G_1 \to G_2$ が **群準同型写像** であるとは, 任意の $x, y \in G_1$ に対して,

$$f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$$

を満たすときをいう. 群準同型写像 f が全単射であるとき, f は **同型写像** と呼ばれる. G_1 から G_2 への同型写像があるとき, G_1 と G_2 は **同型** であるといい記号で $G_1 \simeq G_2$ で表す.

例 5-1 (1) $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であるとする. このとき, 写像

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{det}: & \mathsf{GL}_n(\mathsf{k}) & \longrightarrow & \mathsf{k}^* \\ & A & \longmapsto & \mathsf{det}(A) \end{array}$$

を考えれば, 任意の $A, B \in \mathsf{GL}_n(\mathsf{k})$ をとれば, $\mathsf{det}(AB) = \mathsf{det}(A)\mathsf{det}(B)$ なので det は群準同型である.

(2) G を群として, $x \in G$ をひとつとる. このとき, 写像

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ & n & \longmapsto & x^n \end{array}$$

と定める. $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, $f(m+n) = x^{m+n} = x^m x^n = f(m)f(n)$ なので f は群準同型である.

レポート 5-1 次の写像

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathsf{GL}_2(\mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

は群準同型であることを示せ.

- **5-2：核と像**

線形代数のときに学んだように, 群準同型写像に対して核と像が定義される.

定義 5.2. 群準同型写像 $f : G_1 \to G_2$ に対して,

$$\mathsf{ker}(f) := \{x \in G_1 \mid f(x) = e\}$$

を f の **核** と呼ぶ. また,

$$\mathsf{im}(f) := \{f(x) \in G_2 \mid x \in G_1\}$$

を f の **像** と呼ぶ.

後に示すように, 群準同型写像の核や像はそれぞれ部分群となるが, 部分群であることを示すのに, 毎回 (G1) から (G3) を示すのは少々手間である. そこで部分群の判定方法を述べておこう.

命題 5.3. 群 G の空ではない部分集合 H が G の部分群となる必要十分条件は, 以下の条件を満たすことである.

(SG) 任意の $x, y \in H$ に対して, $xy^{-1} \in H$ である.

証明. **（必要条件）** H が G の部分群であるとする. 任意の $x, y \in H$ をとる. H は部分群なので, $y^{-1} \in H$ である, H は積で閉じているので $xy^{-1} \in H$ である.

（十分条件） まず, H が積で閉じていることを確認しよう. 任意の $x, y \in H$ に対して, $xy = x(y^{-1})^{-1}$ だから条件 (SB) より $xy \in H$ となる. よって H は積について閉じている. G 自身が結合法則を満たすので H も満たす. 従って (G1) を満たす. 次に, H は空集合ではないからある $x \in H$ が取れる. このとき, (SB) より

$$xx^{-1} = e \in H$$

である. 従って H は単位元をもつので (G2) を満たす. 最後に, 任意の $x \in H$ に対して, $e \in H$ であったから (SB) より

$$ex^{-1} = x^{-1} \in H$$

である. 従って x の逆元 x^{-1} が H に属したので (G3) を満たす. 以上で $H \leq G$ であることがわかった. □

命題 5.4. 群準同型写像 $f : G_1 \to G_2$ に対して, 次の主張が成り立つ.

(1) $f(e_1) = e_2$ である. ただし, e_1 は G_1 の単位元で e_2 は G_2 の単位元である.
(2) 任意の $x \in G_1$ に対して, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ である.
(3) $\mathsf{ker}(f)$ は G_1 の部分群であり, $\mathsf{im}(f)$ は G_2 の部分群である.

証明. (1) f は群準同型写像であるから, $f(e_1) = f(e_1e_1) = f(e_1)f(e_1)$ である. 等式 $f(e_1) = f(e_1)f(e_1)$ の両辺の右から $f(e_1)^{-1} \in G_2$ をかければ $e_2 = f(e_1)$ である.

(2) 任意に $x \in G_1$ をとると,

$$f(x^{-1}) = f(x^{-1}e_1) = f(x^{-1})f(e_1) = f(x^{-1})f(xx^{-1}) = f(x^{-1})f(x)f(x^{-1})$$

等式 $f(x^{-1}) = f(x^{-1})f(x)f(x^{-1})$ の両辺の右から $f(x^{-1})^{-1}$ をかければ, $e_2 = f(x^{-1})f(x)$ を得る. この等式の右から $f(x)^{-1}$ をかければ $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ である.

(3) まずは $\mathsf{ker}(f)$ が G_1 の部分群であることを示そう. まず, (1) によって, $f(e_1) = e_2$ だから $e_1 \in \mathsf{ker}(f)$ である. 従って $\mathsf{ker}(f)$ は G_1 の単位元を含んで, 空集合ではない. 任意に $x, y \in \mathsf{ker}(f)$ をとる. このとき, $xy^{-1} \in \mathsf{ker}(f)$ であれば**命題 5.3** によって部分群であることがわかるのでこれを示そう. f が群準同型であることと (2) より

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e_2e_2^{-1} = e_2e_2 = e_2$$

だから $xy^{-1} \in \mathsf{ker}(f)$ であることがわかった. よって $\mathsf{ker}(f) \leq G_1$ である.

最後に $\mathsf{im}(f) \leq G_2$ を証明しよう. $e_1 \in G_1$ をとれば $e_2 = f(e_1) \in \mathsf{im}(f)$ であるので $\mathsf{im}(f)$ は空集合ではない. 任意に $x, y \in \mathsf{im}(f)$ をとろう. 像の定義から, ある $g_1, g_2 \in G_1$ で $f(g_1) = x$, $f(g_2) = y$ となるようにできる. このとき,

$$xy^{-1} = f(g_1)f(g_2)^{-1} = f(g_1)f(g_2^{-1}) = f(g_1g_2^{-1})$$

だから $xy^{-1} \in \mathsf{im}(f)$ である, よって**命題 5.3** より $\mathsf{im}(f) \leq G_2$ である. □

例 5-2　$m > 1$ を正の整数とする. 自然な射影 $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は群準同型である. 実際, 任意に $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\pi(x + y) = \overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y} = \pi(x) + \pi(y)$$

だから π が群準同型である. このとき, $\mathsf{ker}(\pi) = m\mathbb{Z}$ である. これを確認してみよう. 任意に $x \in \mathsf{ker}(\pi)$ をとれば, $\pi(x) = \overline{x} = \overline{0}$ である. よって, $x - 0 = x$ は m の倍数なので $x \in m\mathbb{Z}$. 従って $\mathsf{ker}(\pi) \subset m\mathbb{Z}$ である. 逆

に, 任意に $x \in m\mathbb{Z}$ をとれば, x は m の倍数なので, ある整数 $k \in \mathbb{Z}$ を用いて $x = mk$ とかける．このとき,

$$\pi(x) = \overline{x} = \overline{km} = \overline{0}$$

である．よって, $x \in m\mathbb{Z}$ であるので $\mathrm{ker}(\pi) \supset m\mathbb{Z}$ である．以上で $\mathrm{ker}(\pi) = m\mathbb{Z}$ がわかった.

レポート 5-2　群準同型写像 $f : G_1 \to G_2$ と $N \leq G_2$ に対して, N の f による **逆像** を

$$f^{-1}(N) := \{x \in G_1 \mid f(x) \in N\}$$

で定義する．これは G_1 の部分集合であることを示せ．（ヒント：$f^{-1}(N) \neq \varnothing$ であることを示して, **命題 5.3** を用いよ．）

命題 5.5. 群準同型写像 $f : G_1 \to G_2$ に対して, $\mathrm{ker}(f)$ は G_1 の正規部分群である.

証明. 任意の $g \in G_1$ と任意の $h \in \mathrm{ker}(f)$ をとる．$ghg^{-1} \in \mathrm{ker}(f)$ であることを示せばよい．f は群準同型写像なので

$$f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e_2 f(g)^{-1} = f(g)f(g)^{-1} = e_2$$

である．よって $ghg^{-1} \in \mathrm{ker}(f)$ だから $\mathrm{ker}(f) \triangleleft G_1$ であることがわかった. □

命題 5.5 によって, **命題 4.10** と合わせれば, 剰余群 $G_1/\mathrm{ker}(f)$ を定義することができることがわかった.

定理 5.6 (準同型定理)**.** 群準同型写像 $f : G_1 \to G_2$ に対して, 写像

$$\begin{array}{cccc} \overline{f}: & G_1/\mathrm{ker}(f) & \longrightarrow & \mathrm{im}(f) \\ & x\mathrm{ker}(f) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

は群の同型写像である．つまり, $G_1/\mathrm{ker}(f) \simeq \mathrm{im}(f)$ が成り立つ.

証明. まず, $\overline{f}$ が well-defined であることを確認しよう．$x\mathrm{ker}(f) = x'\mathrm{ker}(f)$ であると仮定する．このとき $xx'^{-1} \in \mathrm{ker}(f)$ である．よって, $f(xx'^{-1}) = e_2$ である．一方, f は群準同型写像であるから

$$f(xx'^{-1}) = f(x)f(x'^{-1}) = f(x)f(x')^{-1}$$

である．よって, $f(x)f(x')^{-1} = e_2$ であり, これの両辺に右から $f(x')$ をかけると $f(x) = f(x')$ である．従って $\overline{f}$ は well-defined であることがわかった.

$\overline{f}$ が群準同型写像であることを示す．任意に $x\mathrm{ker}(f), y\mathrm{ker}(f) \in G_1/\mathrm{ker}(f)$ をとる．このとき,

$$\overline{f}((x\mathrm{ker}(f))(y\mathrm{ker}(f))) = \overline{f}((xy)\mathrm{ker}(f)) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(x\mathrm{ker}(f))\overline{f}(y\mathrm{ker}(f))$$

である．従って $\overline{f}$ は群準同型写像である.

あとは $\overline{f}$ が全単射であることを証明すれば良い.

（単射性） $\overline{f}(x\mathrm{ker}(f)) = \overline{f}(y\mathrm{ker}(f))$ であると仮定すると, $f(x) = f(y)$ である．このとき, 両辺に $f(y)^{-1}$ を右からかけて

$$e_2 = f(x)f(y)^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1})$$

を得る．これより, $xy^{-1} \in \mathrm{ker}(f)$ だから $x\mathrm{ker}(f) = y\mathrm{ker}(f)$ を得る．以上で $\overline{f}$ は単射である.

（全射性） 任意に $z \in \mathrm{im}(f)$ をとれば, ある $x \in G_1$ によって $f(x) = z$ とできる．このとき, $x\mathrm{ker}(f)$ をとれば, $\overline{f}(x\mathrm{ker}(f)) = f(x)$ である．よって $\overline{f}$ は全射である.

以上で $G_1/\mathrm{ker}(f) \simeq \mathrm{im}(f)$ が成り立つ. □