# 8　圏と関手

**• 8-1：圏という考え方**

ベクトル空間や環のような集合に何かしらの構造が付与されているようなものを考察するとき, それに応じた準同型写像や部分, 剰余などの概念を扱う. 例えば, ベクトル空間を扱うときには, 線型写像, 部分空間, 商ベクトルなどがそれにあたり, 群を扱うときには群準同型写像, 部分群, 剰余群がそれにあたる. このように, 扱う対象が違う場面ごとに同様の概念を扱うことになるが, これらは圏論というひとつ上の次元から考察することで同一の議論に昇華できるのである. これまではある集合があってその上に巧い性質と写像を導入することで理論を構築してきた. 例えば, 線形代数においてはベクトル空間の定義を満たす集合とその間の線形写像を考えることで理論を進めたり, 群論では群の公理をみたす集合とその間の群準同型写像を考えることで理論を構築したりした. そしてこれらを統括してある種の高い視点である圏論は現代では物理学や情報科学といった分野に大きく貢献している. ここでは圏論の初歩をかいていくこととしよう.

圏論では, いわゆる集合論とは対極的な見方をする概念である. 集合論は「元が集まって集合ができる」という観察が議論の出発点であり,「ある集合の元を別の集合の元に対応させる」こととして写像の概念を導入する. しかし圏論では集合や元の存在をあらかじめ想定していない. むしろ圏論は, 集合よりも写像に優先的・基本的な地位を与える. 集合論では「集合が先で写像が後」なのに対して, 圏論では「写像が先で集合が後」である.

**定義 8.1.** **圏** $\mathcal{C}$ とは, 以下のデータからなる 3 つ組 $(\mathsf{ob}(\mathcal{C}), \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}, \circ)$ である.

(Cat1) $\mathcal{C}$ の**対象**と呼ばれるクラス $\mathsf{ob}(\mathcal{C})$ が与えれれている. 以下, $X$ が $\mathcal{C}$ の対象であることを $X \in \mathcal{C}$ と表す.

(Cat2) 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して, 集合 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が与えられている. $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ の元を $X$ から $Y$ への**射**という. 射 $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ を $f : X \to Y$ や $X \xrightarrow{f} Y$ などと表す.

(Cat3) 射に関する合成

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ & (g, f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

が与えられていて, これは結合則

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

を満たす.

(Cat4) 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して, 合成に関して単位的に振る舞う**恒等射** $1_X \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ がただ一つ存在する. すなわち, 任意の $f : X \to Y$ に関して $1_Y \circ f = f$, $f \circ 1_X = f$ が成り立つ.

対象 $X \in \mathcal{C}$ の恒等射 $1_X$ の「一意性」は, 合成に関して単位的に振る舞うという性質から導かれる. 実際, 合成に関して単位的に振る舞うような $1_X$, $1'_X$ が二つあったとすると,

$$1_X = 1_X \circ 1'_X = 1'_X$$

だからである. ここで, 上式の左の等号は $1'_X$ の性質から, 右の等号は $1_X$ の性質から得られている.

**例 8-1**　以下, $K$ は体であるとする.

(1) 集合の圏 Set. 対象は集合で, 射は集合の間の写像.
(2) 群の圏 Grp. 対象は群で, 射は群準同型写像.
(3) アーベル群の圏 Ab. 対象はアーベル群で, 射は群準同型写像.
(4) 環の圏 Ring. 対象は環で, 射は環準同型写像.
(5) $K$ 上のベクトル空間の圏 $\mathsf{Vect}_K$. 対象は $K$ 上のベクトル空間で, 射は線型写像.

部分群, 部分環などの概念と同様に, 圏に対しても「部分圏」といいう概念がある.

**定義 8.2.** 圏 $\mathcal{C}'$ が圏 $\mathcal{C}$ の**部分圏**であるとは, 以下の 3 条件件を満たすときをいう.

(Sub1) $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}') \subset \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ が成り立つ.
(Sub2) 任意の $X, Y \in \mathcal{C}'$ に対して, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ である.
(Sub3) $\mathcal{C}'$ の合成と恒等射は $\mathcal{C}$ のものと一致している.

特に, 任意の $X, Y \in \mathcal{C}'$ に対して等号 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が成り立つとき, $\mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ のなかで **充満** であるという.

$\mathcal{C}$ を圏, $X, Y \in \mathcal{C}$ とする. $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して, 次のような射 $g$ がもし存在すれば, $g$ を $f$ の **逆射** という.

$$f \circ g = 1_Y, \quad g \circ f = 1_X$$

**補題 8.1.** 逆射は存在すれば一意的に定まる.

**証明.** $g, g'$ が $f$ の逆射であったとする. このとき

$$f \circ g = 1_Y, \qquad g' \circ f = 1_X$$

であるから

$$g = 1_x \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ 1_Y = g'$$

である. □

こうして逆射の一意性が示されたので, 以下では $f^{-1}$ で $f$ の逆射を表すこととする.

## • 8-2 : モノとエピ

写像に単射と全射があるように, 射にも単射と全射を定めたい. しかし圏論の世界では集合の世界のように元の行き先なるものが考えられないから別枠で定義する必要がある. しかもその新たな定義が, 集合の世界における単射や全射とまるっきり異なっていたら話にならない. ある程度は知っている世界の性質を保存しながらうまく定義しなければならないのである. また, 圏論の世界においては射がその主な地位を占めているのだから, 射をもってして射の単射や全射を定めたい. そこで集合論における次の写像に関する性質を思い出そう.

$X, Y$ は集合とし, $f : X \longrightarrow Y$ を $X$ から $Y$ への写像とする. このとき次が成り立つ.

(1) $f$ が単射 $\Longleftrightarrow$ 任意の $W$ と任意の $g, h : W \to X$ に対して $fg = fh$ ならば $g = h$ が成り立つ.
(2) $f$ が全射 $\Longleftrightarrow$ 任意の $Z$ と任意の $g, h : Y \to Z$ に対して $gf = hf$ ならば $g = h$ が成り立つ.

**レポート 8-1**　上の同値 (1), (2) を証明せよ.

これを応用して, 圏の世界における射の単射と全射を定義する. ただし, 集合における単射と全射との区別を付けるため, 圏の世界での単射を「モノ」, 全射を「エピ」ということにする.

**定義 8.3.** $\mathcal{C}$ を圏, $X, Y \in \mathcal{C}$ とし, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ をとる. このとき

(a) $f$ が **モノ** であるとは 任意の $W \in \mathcal{C}$ と $f \circ g = f \circ h$ となる任意の $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ に対して常に $g = h$ が成立するときをいう.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ W \arrow[u, shift left, "h"'] \arrow[u, shift right, "g"] \arrow[ur, dashed, "f\circ g = f\circ h"'] & \end{tikzcd} \Longrightarrow g = h$$

(b) $f$ が **エピ** であるとは 任意の $Z \in \mathcal{C}$ と $g \circ f = h \circ f$ となる任意の $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ に対して常に $g = h$ が成立するときをいう．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f = h\circ f"'] & Y \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \Longrightarrow g = h$$

もう少し射に関する用語を紹介しよう．以下, $\mathcal{C}$ は圏とする．

**定義 8.4.** $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が **同型射** であるとは $f$ が逆射 $f^{-1}$ をもつときをいう．そして $X, Y$ の間に同型射が存在するときに $X, Y$ は **同型** であるといい, $X \simeq Y$ とかく．

**補題 8.2.** 同型射は常にモノかつエピである．

**証明.** $f$ を $\mathcal{C}$ の対象 $X$ から対象 $Y$ への同型射とすれば, $f$ の逆射 $f^{-1}$ が存在する．すなわち

$$f \circ f^{-1} = 1_Y, \quad f^{-1} \circ f = 1_X.$$

モノであることをまず示す．任意の $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $f \circ g = f \circ h$ となる任意の $g, h \in \mathrm{Hom}(W, X)$ を与えておくと, これに左から $f^{-1}$ を合成すれば良い．従って $f$ はモノである．エピであることも同様にして $f^{-1}$ を $g \circ f = h \circ f$ の右から合成すればよい．□

上の補題 8.2 は逆が成立しない．もう一つ, 感覚と異なる反例を与えておく．

**例 8-2**　環の圏 Ring において $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ を考え, $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ を埋め込み写像とする．すなわちこの $\iota$ は全単射だが同型射ではない．慣れてくれば当然なのであるが, $\iota$ が全射であるというのは不思議な気持ちになる．

まず $\iota$ は埋め込みなので環準同型写像である．また, $\iota$ が全単射であることは機械的に示すことができる．ここでは全射のみを示しておく任意の $R \in \mathsf{Ring}$ と $u, v \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ring}}(\mathbb{Q}, R)$ をとり $u \circ \iota = v \circ \iota$ とする．このとき任意の $q \in \mathbb{Q}$ に対して $q = \dfrac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z}$ とかけるので $\iota$ の準同型性から

$$\iota(q) = \iota\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\iota(m)}{\iota(n)}$$

とできる．よって $u \circ \iota(q) = v \circ \iota(q)$ ならば $u(q) = v(q)$ である．従って $u = v$ を得るので $\iota$ は全射である．しかしこれは同型射ではない．実際, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ring}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ をとれば

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

とならなければならないが, このような

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Z}$$

は存在しない．従って $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ring}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \varnothing$ だから $\iota$ の逆射を作ることはできない

- **8-3 ： 関手**

圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}$ の射の向きを形式的に入れ替えることで以下の概念が得られる．

**定義 8.5.** 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}$ の **反圏** $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ が以下で定義される．

(a) 対象に関して, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ である．

(b) 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ である．

(c) 任意の $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Z, Y)$, $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y, X)$ をととる．このとき, $\mathcal{C}$ のなかで $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ となっているので, $f$ と $g$ の $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の合成 $\circ^*$ は

$$f \circ^* g = g \circ f$$

で定義される．

2 つの圏があったとき, それらの間の圏論的な関係性を調べたいということがある．これは, 考察している数学的対象の間の写り合いを与えることになる．例えば, 群から群環を構成する対応は群の圏 Grp から環の圏 Ring への対応を与えている．この対応は「関手」という形で一般化される．

**定義 8.6.** $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を圏とする．$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が **共変関手** あるいは単に **関手** であるとは, 以下の条件を満たすような対応のことである．

(1) 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して, 対象 $F(X) \in \mathcal{D}$ がひとつ対応する．
(2) 任意の射 $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して, 射 $F(f) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ がひとつ対応する．
(3) $F$ は合成を保つ．すなわち, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ が成り立つ．
(4) $F$ は恒等射を恒等射にうつす．すなわち, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{D}$ の射として $F(1_X) = 1_{F(X)}$ である．

また, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が **反変関手** であるとは, $F$ が $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ から $\mathcal{D}$ への共変関手を与えるときをいう．

**例 8-3**　(1) 圏 $\mathcal{C}$ に対して, 次で定ま関手 $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を **恒等関手** という．

- 対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(X) = X$ と定める．
- 射 $f : G \to H$ に対して, $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(f) = f$ と定める．

(2) $K$ を体であるとする．このとき, $F : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Ring}$ を以下で定めれば, これは関手となる．

- 対象の対応として, $F(G) = KG = \{\sum_{g \in G} k_g g \mid k_g \in K,$ 和は有限和である．$\}$ と定める．
- 射 $f : G \to H$ の対応として, $F(f) : KG \to KH$ を

$$F(f)\left(\sum_{g \in G} k_g g\right) = \sum_{g \in G} k_g f(g)$$

と定める．

関手には自然に合成が定められる．3 つの圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ として, 2 つの関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ をとる．このとき, 以下で定める対応 $G \circ F$ は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{E}$ への関手を与える．

(a) 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して, $G \circ F(X) = G(F(X))$ と定める．
(b) 任意の射 $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して, 射 $G \circ F(f) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(G \circ F(X), G \circ F(Y))$ は $G \circ F(f) = G(F(f))$ と定める．

以下, $G \circ F$ の合成記号を省略して $GF$ と書くことにする．

モノ射とエピ射の図式を眺めてみると, これらは「矢印の向きが入れ替わっている概念」であることに気づく．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ W \arrow[u, shift left, "g"] \arrow[u, shift right, "h"'] \arrow[ur, dashed, "f \circ g = f \circ h"'] & \end{tikzcd} \Longrightarrow g = h, \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f = h \circ f"'] & Y \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \Longrightarrow g = h$$

このように, 圏論ではもとの性質 (P) に対して, 「射の向きを逆にした」性質 (P$^*$) を考えることがある. この性質 (P$^*$) を性質 (P) の **双対 (dual)** という. 当然だが. (P) の双対の双対は (P) に戻る. 圏論的になにかの命題「性質 (P) ならば性質 (Q)」という類のものが射によってのみ与えられていたとき, その射を全て逆向きにすることで双対命題「性質 (P$^*$) ならば性質 (Q$^*$)」が得られる. 一方の命題が証明されたとき, 原理的には射の向きを逆にしてその双対を証明することができる. 双対の言葉を使えば, 共変関手と反変関手は双対的な概念である.

- **8-4 : 自然変換**

関手の間の射に相当するものが自然変換と呼ばれる概念である.

**定義 8.7.** $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を圏, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする. $\Phi : F \Rightarrow G$ が **自然変換** であるとは, $\mathcal{D}$ の射の組

$$\Phi = \{\Phi_X : F(X) \longrightarrow G(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$$

であって, 任意の $\mathcal{C}$ の射 $f : X \to Y$ に対して次の $\mathcal{D}$ の中の可環図式が満たされるものをいう.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\Phi_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

また, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, $\Phi_X : F(X) \to G(X)$ が $\mathcal{D}$ の対象の同型を与えるとき, $F$ と $G$ は **自然同型** といい, $F \simeq G$ とかく.

**例 8-4**　$K$ を体とする. $K$ 上のベクトル空間 $V$ に対して $V$ の双対ベクトル空間を $V^* = \mathsf{Hom}_K(V, K)$ とおく. ここに, $\mathsf{Hom}_K(V, W)$ は $V$ から $W$ への線型写像全体である. このとき, 反変関手

$$(-)^* = \mathsf{Hom}_K(-, K) : \mathsf{Vect}_K \longrightarrow \mathsf{Vect}_K$$

が次のように定まる.

- 対象の対応は $V \longmapsto V^*$ とする.
- 射の対応は, $f : V \to W$ に対して $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ を $g \longmapsto g \circ f$ とする.

この反変関手 $(-)^*$ の 2 回の合成 $(-)^* \circ (-)^*$ を $(-)^{**}$ とかけば, これは共変関手

$$(-)^{**} : \mathsf{Vect}_K \longrightarrow \mathsf{Vect}_K$$

を定める.

いま, 2 つの関手 $\mathbf{1}_{\mathsf{Vect}_K}$ と $(-)^{**}$ に対して次のようにして $\mathsf{ev} : \mathbf{1}_{\mathsf{Vect}_K} \Longrightarrow (-)^{**}$ を $K$ 上のベクトル空間 $V$ に対して

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{ev}_V : & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & x & \longmapsto & [f \mapsto f(x)] \end{array}$$

と定めることができる. これが任意の線型写像 $f : V \to W$ に対して可環図式

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathsf{ev}_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\
W \arrow[r, "\mathsf{ev}_W"'] & W^{**}
\end{tikzcd}$$

を満たすことを容易に確認することができるから, $\mathsf{ev}$ は $\mathbf{1}_{\mathsf{Vect}_K}$ から $(-)^{**}$ への自然変換を定める.

また, $\mathsf{Vect}_K$ の充満な部分圏 $\mathsf{vect}_K$ を, $K$ 上の有限次元のベクトル空間のなす圏とする．このとき, 2 つの関手 $\mathbf{1}_{\mathsf{Vect}_K}$ と $(-)^{**}$ : は

$$\mathbf{1}_{\mathsf{vect}_K},\ (-)^{**} : \mathsf{vect}_K \longrightarrow \mathsf{vect}_K$$

を誘導する．このとき, 自然変換 $\mathsf{ev} : \mathbf{1}_{\mathsf{vect}_K} \Longrightarrow (-)^{**}$ は自然同型を与える．

自然変換の間に合成が自然に定まる．

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．また, $\Phi : F \Longrightarrow G$, $\Psi : G \Longrightarrow H$ を自然変換とする．このとき, $\Psi \circ \Phi : F \Longrightarrow H$ を

$$\Psi \circ \Phi = \{\Psi_X \circ \Phi_X : F(X) \to H(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$$

として, 自然変換が定まる．

**レポート 8-2**　$\Psi \circ \Phi = \{\Psi_X \circ \Phi_X : F(X) \to H(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ が自然変換を定めることを示せ．

**定義 8.8.** $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏として, 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ をとる．これらが

$$GF \simeq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, \quad FG \simeq \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$$

を満たしているとき $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は **圏同値** といい, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ とかく．このとき, $F$, $G$ は互いに **準逆** であるという．上の自然同型が等号となっているとき, すなわち

$$GF = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, \quad FG = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$$

となっているとき, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は **圏同型** という．

関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ の準逆 $G$ は自然同型を除いて一意的に定まる．実際, $G$ と $G'$ が $F$ の準逆であるとき

$$G = G\mathbf{1}_{\mathcal{D}} \simeq GFG' \simeq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}G' = G'$$

からわかる．そこで, $F$ の準逆を $F^{-1}$ と書くこともある．

自然変換や自然同値, 圏同値に関して, 関手が反変関手の場合でも同様の手続きで定義できる．反変関手による圏同値を **圏双対** という．圏 $\mathcal{C}$ と圏 $\mathcal{D}$ が圏双対であるとき, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ と $\mathcal{D}$ は圏同値であり, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ も圏同値である．