1　集合

• 1-1：集合

条件がはっきりとしているようなものの集まりを **集合** といい, このとき集められている 1 つ 1 つのものを **元** または **要素** という. a が集合 A の元であることを, $a \in A$（$A \ni a$）と表し, a は A に **属する**（**含まれる**）という. a が集合 A の元でないとき, $a \notin A$（$A \not\ni a$）と表す.

特別な集合に対してはそれを表す記号が用意されており, 本講義でも用いるので紹介しよう.

- $\mathbb{N}$ = 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z}$ = 整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$ = 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$ = 実数全体の集合
- $\mathbb{C}$ = 複素数全体の集合

これらの記号を実際に板書するときは, 原則としてアルファベットの左側を二重線などで書き表すことが多い.

集合 A が有限個の元しか含まないとき, A は **有限集合** であるという. また, A が無限に多くの元を含むとき, A は **無限集合** であるという.

2 つの集合 A, B に対して, $x \in A$ ならば $x \in B$ であるとき, A は B の **部分集合** であるといい $A \subset B$ ($A \supset B$) と表す. このとき, A は B に **含まれる** という. A が B の部分集合ではないとき, $A \not\subset B$ と表す. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるとき, A と B は **等しい** といい, $A = B$ と表す. A と B が等しくないとき, $A \neq B$ と表す. つまり, 集合の相等 $A = B$ を示すときは, 「A が B の部分集合になること」と「B が A の部分集合になること」の 2 つを示すことになる. $A \subset B$ かつ $A \neq B$ であるとき, A は B の **真部分集合**（A は B に真に含まれる）といい, $A \subsetneq B$ と表す. 元をひとつも持たない集合を **空集合** といい, 記号で $\varnothing$ と表す.

例 1-1　$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ である.

集合 A の要素を表す方法には, 次の 2 通りがある.

- **外延的記法**：全ての元を列挙する方法　$\{a, b, c, \ldots\}$.
- **内包的記法**：元 x が満たすべき条件 P を明示する方法　$\{x \mid x$ は条件 P を満たす. $\}$.

例 1-2　(1) 10 以下の素数全体からなる集合 A を表すとき,

$$A = \{2, 3, 5, 7\} = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の素数 }\}$$

などと表す. この場合は, 漏れなく元を書き並べることができるため, 外延的記法の方が適している.

(2) 100 以下の整数全体からなる集合 B を表すとき,

$$B = \{100, 99, 98, 97, \ldots, 0, -1, -2, \ldots\} = \{x \mid x \text{ は } 100 \text{ 以下の整数 }\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \leq 100\}$$

などと表す. この場合は, 全ての元を列挙することができないので, 内包的記法の方が適している.

(3) 集合 A の元のうち, 条件 P を満たすもの全体を表したいときは, $\{x \mid x \in A,\ x$ は条件 P を満たす. $\}$ を $\{x \in A \mid x$ は条件 P を満たす. $\}$ と書いても良い. 例えば, (2) の 100 以下の整数全体からなる集合 B は

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 100\}$$

と書いても良い.

(4) 内包的記法では, 「どのような集合であるか」を正確に表現できていればよい. 例えば奇数全体の集合は

$$\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と表せる. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n + 1\}$ では「整数全体」を表しているので適切に表現できてない.

- **1-2: 集合の演算**

　2 つの集合 A, B に対して, A または B のいずれかに属する元全体からなる集合を A と B の **和集合** といい, $A \cup B$ で表す：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

また, A と B のどちらにも属する元全体からなる集合を A と B の **共通部分** といい, $A \cap B$ で表す：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

$A \cap B = \varnothing$ であるとき, A と B は **互いに素** という. 集合 A には属するが, B には属していない元全体を $A \setminus B$ で表し, これを A と B の **差集合** という：

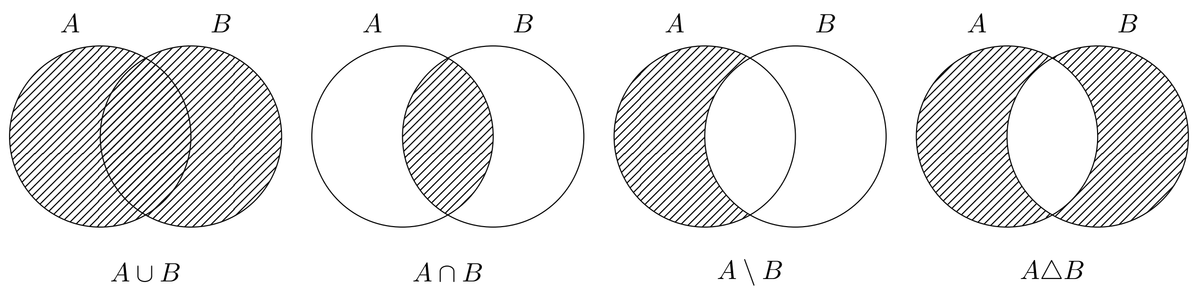
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

また, A と B の **対称差** $A \triangle B$ を

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

で定義する.

　以下のように, 複数の集合の関係や範囲を視覚的に図式化したものを **ベン図** という.



例 1-3　集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ A \cap B &= \{4, 5, 6\} \\ A \setminus B &= \{1, 2, 3\} \\ A \triangle B &= \{1, 2, 3, 7, 8, 9\} \end{aligned}$$

である.

　集合の和集合や共通部分について, 次が成り立つ.

定理 1.1 (交換則)**.** 集合 A, B について, 次が成り立つ.

(1) $A \cup B = B \cup A$　　(2) $A \cap B = B \cap A$

定理 1.2 (結合則)**.** 集合 A, B, C について, 次が成り立つ.

(1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　　(2) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cap C)$

定理 1.3 (分配則)**.** 集合 A, B, C について, 次が成り立つ.

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$　　(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

定理 1.4. 集合 A, B, C について, 次が成り立つ.

(1) $A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B$　　(2) $A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$

(3) $A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば, $A \cup B \subset C$　　(4) $C \subset A$ かつ $C \subset B$ ならば, $C \subset A \cap B$

- **1-3: 補集合**

集合を扱うとき, ある固定した集合の部分集合であることが多い. この固定した集合を **全体集合** という. X を全体集合とし, $A \subset X$ とするとき, 差集合 $X \setminus A$ を A の **補集合** といい, $\overline{A}$ と表す. つまり,

$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

とかける. $A \cup B$ を全体集合とするとき, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ と表すことができる.

例 1-4　10 以下の自然数全体の集合 X を全体集合とする. 10 以下の素数全体からなる集合 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ に対して, $\overline{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ である.

補集合はその定義から次が成り立つ.

定理 1.5. X を全体集合, A, B を X の部分集合とする.

(1) $A \cup \overline{A} = X$,　$A \cap \overline{A} = \varnothing$,　(2) $\overline{(\overline{A})} = A$

(3) $\overline{X} = \varnothing$,　$\overline{\varnothing} = X$　(4) $B \subset A$ ならば $\overline{B} \supset \overline{A}$

補集合と和集合, 共通部分との間の関係について, 次の性質は重要である.

定理 1.6 (de Morgan の法則)**.** A, B を集合とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$　(2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- **1-4 直積集合**

2 つの空でない集合 A, B が与えられたとき, A の元 a と B の元 b の組 (a, b) の全体を $A \times B$ 考えることができる.

$$A \times B = \Big\{(a,\, b) \mid a \in A,\, b \in B\Big\}$$

これを A と B の **直積集合** という. A もしくは B が空集合のときは $A \times B$ も空集合と約束する. 2 つの組 $(a, b), (c, d) \in A \times B$ に対して, $a = c$ かつ $b = d$ であるとき $(a, b) = (c, d)$ であると定める.

例 1-5　$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ に対して,

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

となる. 上記の例より, 一般に $A \times B \neq B \times A$ である.

- **1-5 集合族と冪集合**

集合 A に対して, A の部分集合全体からなる集合を A の **冪集合** といい, 記号で 2^A とかく. 集合 A が n 個の元からなる場合, A の各元 $x \in A$ を含むか含まないかの二択を行うことで, ひとつの部分集合ができるので, 2^A は 2^n 個の元からなる.

例 1-6　$A = \{1, 2, 3\}$ のときは

$$2^A = \Big\{\varnothing,\, \{1\},\, \{2\},\, \{3\},\, \{1,\, 2\},\, \{1,\, 3\},\, \{2,\, 3\},\, \{1,\, 2,\, 3\}\Big\}$$

であり, これは $2^3 = 8$ 個の元からなる.

冪集合は「集合を元ともつ集合」である. このようにいくつかの集合からなる集合を **集合族** という.

- **1-6: 3 つ以上の集合に対する演算**

交換則（**定理 1.1**）によって, いくつかの集合の共通部分や和集合を考えるときは, 項の順序は任意に換えても良い. また, 結合則（**定理 1.2**）によって, どこへ括弧をつけても表す集合は変わらない. よって, 例えば $(A \cup B) \cup C$ や $A \cup (B \cup C)$ は $A \cup B \cup C$ と書いても良い. 共通部分についても同様である.

集合 Λ のぞれぞれの元 λ に対して, 集合 A_λ が決まるとする. この Λ を集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の **添字集合** という. このとき, A_λ たちの和集合および共通部分は

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対して, } x \in A_\lambda\}, \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \text{全ての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して, } x \in A_\lambda\}$$

と表す.

- $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ であるとき, 和集合と共通部分は
  （和集合）$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$
  （共通部分）$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$
  と表す.
- $\Lambda = \mathbb{N}$ のとき, つまり各自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 集合 A_n が決まっているとき, その和集合と共通部分は
  （和集合）$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{ある自然数 } n \in \mathbb{N} \text{ に対して, } x \in A_n\}$
  （共通部分）$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{全ての自然数 } n \in \mathbb{N} \text{ に対して, } x \in A_n\}$
  と表す.

- **1-7: 3 つ以上の集合に対する直積**

Λ を添字集合とする集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の直積集合についても考えよう. Λ が有限集合 $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ であるとき, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の直積集合は

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$$

と定める. A_1 から A_n が全て同じ集合 A のときは,

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n} = A^n$$

とかく.

$\Lambda = \mathbb{N}$ のとき, 集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の直積集合は

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mid \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して, } x_n \in A_n \text{ である }\}$$

である.

上で見たように, $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ の元は無限に続く列 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ である. しかし一般に, 無限に並ぶ場合は, それを一列に並べて書き表すことがいつでもできるわけではない. 一般の添字集合 Λ に対して, 集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の直積集合の元は $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ のように書き表す. つまり,

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して, } x_\lambda \in A_\lambda \text{ である }\}$$

と定める. この場合も, 全ての $\mu \in \Lambda$ に対して $x_\mu = y_\mu$ となるとき, $(x_\lambda) = (y_\lambda)$ と定義する.