

2 写像

• 2-1 : 写像

定義 2.1. X, Y を集合とし, X の任意の元に対して, Y のある元をただ一つ対応させる規則 f が与えられているとする. このことを

$$f: X \longrightarrow Y$$

と表し, f を X から Y への **写像** といい, X を f の **定義域**, Y を f の **値域** という. $Y \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のとき, f をそれぞれ実数値関数, 複素数値関数ともいう. これらは単に関数とも呼ばれる.

写像 $f: X \rightarrow Y$ によって, $x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき, $y = f(x)$ と表す. このとき, y を x の f による **像**, x を f の y の **原像** または **逆像** という. x と y の対応を $x \mapsto y$ とかく.

例 2-1 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, 実数 $x^2 \in \mathbb{R}$ を対応させる規則 f は写像である. これは

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup & & \cup \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

と表せる. 例えば $f(3) = 9, f(-1) = 1, f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$ である. また, $f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ である.

例 2-2 0 以上の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して, $b^2 = a$ となる実数 $b \in \mathbb{R}$ を対応させる規則 g は写像ではない. なぜならば, 1 に対応する実数は ± 1 の 2 つあり, g は実数をただ一つに定める規則ではないからである.

例 2-3 集合 X に対して, $x \in X$ を x に対応させる規則 id_X は写像である. つまり,

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_X: & X & \longrightarrow & X \\ & \cup & & \cup \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

であるが, これを X 上の **恒等写像** という.

集合 X, Y に対して, X から Y への写像 f, g が写像として **等しい** とは, 任意の $x \in X$ に対して, $f(x) = g(x)$ を満たすときをいう. このとき, $f = g$ と表す. 2 つの写像 f, g が写像として等しくないとき, $f \neq g$ と表す.

例 2-4 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $f(n) = n^2, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(n) = n^2$ と定める. このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(n) = g(n)$ であるが, それぞれの写像の値域が異なるため, 写像として $f \neq g$ である.

• 2-2 : 単射, 全射

定義 2.2. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- 写像 f が **単射** または **1:1** であるとは, 「 $x_1, x_2 \in X$ で $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つ」ときをいう.
- 写像 f が **全射** または **上への写像** であるとは, 「任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ となる」ときをいう.
- 写像 f が単射かつ全射であるとき **全単射** という.

例 2-5 (1) 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める. これは $f(1) = f(-1) = 1$ だから単射はない. また, $f(x) = -1$ となるような $x \in \mathbb{R}$ は存在しないので全射でもない.

(2) 写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $f(n) = 3n$ で定義する. $n \neq m$ のとき, $3n \neq 3m$ だから f は単射である. また, $f(n) = 1$ となるような $n \in \mathbb{Z}$ は存在しないので f は全射ではない.

(3) 写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を $f(n) = 2n$ で定義すると, これは全単射である.

(4) 集合 X に対して, X 上の恒等写像 id_X は明らかに全単射である.

(5) 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ で定める. このとき, f は単射でも全射でもない.

● 2-3 : 像と逆像

定義 2.3. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

(a) $C \subset X$ に対して, $a \in C$ であるような Y の元 $f(a)$ の全体を $f(C)$ と表し, f による C の **像** という. すなわち,

$$f(C) = \{f(a) \mid a \in C\}.$$

(b) $D \subset Y$ に対して, $f(a) \in D$ となる X の元 a の全体を $f^{-1}(D)$ で表し, f による D の **逆像** という. すなわち,

$$f^{-1}(D) = \{a \in X \mid f(a) \in D\}.$$

である. また, $b \in Y$ に対して, $f^{-1}(\{b\})$ を単に $f^{-1}(b)$ と表す.

例 2-6 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ とし, 写像 $f: X \rightarrow Y$ を $f(a) = f(c) = 1$, $f(b) = 2$ によって定義する. このとき,

$$f(\{a, b\}) = \{1, 2\}, \quad f(\{a, c\}) = \{1\}, \quad f^{-1}(1) = \{a, c\}, \quad f^{-1}(\{2, 3\}) = \{b\}$$

である.

$a < b$ を満たす実数 a, b に対する **开区間** (a, b) , **闭区間** $[a, b]$, 半开区間 $(a, b]$, $[a, b)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, & [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \end{aligned}$$

と表示される. また,

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, & (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{aligned}$$

として表す. これらを総称して **区間** という.

例 2-7 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ によって定義する. このとき,

$$f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1], \quad f^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}], \quad f^{-1}([0, +\infty)) = \mathbb{R}$$

である.

命題 2.4. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. $X_1, X_2 \subset X$ および $Y_1, Y_2 \subset Y$ について, 次が成り立つ.

(1) $X_1 \subset X_2$ であれば, $f(X_1) \subset f(X_2)$ である.

(2) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

(3) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.

- (4) $Y_1 \subset Y_2$ であれば, $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$ である.
- (5) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
- (6) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

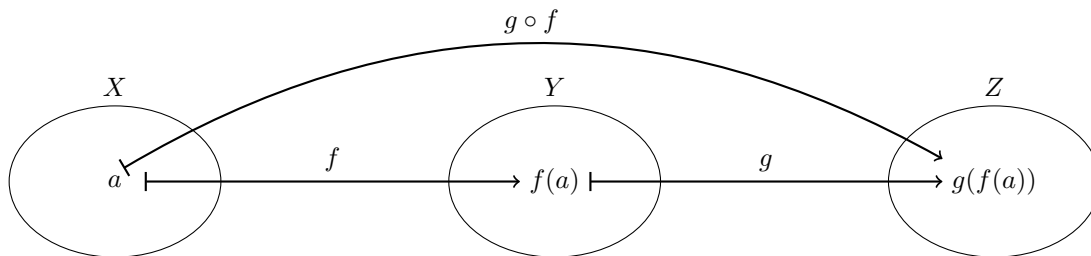
証明. (1), (2) のみ示す. (3), (4), (5), (6) は各自で証明せよ.

(1) 任意に $b \in f(X_1)$ をとれば, ある $a \in X_1$ によって $b = f(a)$ とできる. ここで, $X_1 \subset X_2$ なので $a \in X_1$ から $a \in X_2$ である. よって, $b = f(a) \in f(X_2)$ である.

(2) 任意に $b \in f(X_1 \cup X_2)$ をとると, ある $a \in X_1 \cup X_2$ がとれて, $b = f(a)$ となるものが存在する. もし, $a \in X_1$ ならば $b \in f(X_1)$ であり, $a \in X_2$ ならば $b \in f(X_2)$ である. いずれにしても $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$ であるから $f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$ である. 次に $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$ をとる. もし, $b \in f(X_1)$ ならば, ある $a_1 \in X_1$ が存在して $b = f(a_1)$ とできる. もし, $b \in f(X_2)$ ならば, ある $a_2 \in X_2$ が存在して $b = f(a_2)$ とできる. いずれにしても, $a \in X_1 \cup X_2$ で $f(a) = b$ とできるので, $b \in f(X_1 \cup X_2)$ である. よって, $f(X_1 \cup X_2) \supset f(X_1) \cup f(X_2)$ である. よって, $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ が示された. \square

● 2-4 : 合成写像

写像 $f : X \rightarrow Y$ および $g : Y \rightarrow Z$ が与えられたとき, $x \mapsto g(f(x))$ により, 新たな写像を定義できる. これを $g \circ f : X \rightarrow Z$ と表し, f と g の **合成写像** という.



例 2-5 集合 X を, 実数成分をもつ 2 次正方行列全体とする. すなわち

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

とし, $\det : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $M \in X$ に対して, M の行列式 $\det(M)$ を対応させる写像とする. また, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \mapsto x^2 - 1$ という写像とする. このとき, 合成写像 $f \circ \det : X \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$f \circ \det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = f \left(\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = f(ad - bc) = (ad - bc)^2 - 1 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd - 1$$

となる

定義 2.5. $f : X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (a) 写像 f が **可逆** であるとは, ある写像 $g : Y \rightarrow X$ が存在して, $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ となるものが存在するときをいう.
- (b) 写像 f が可逆であるとき, (a) を満たす写像 $g : Y \rightarrow X$ を f の **逆写像** と呼び, f^{-1} と書く.

命題 2.6. 写像 $f : X \rightarrow Y$ が可逆であるための必要十分条件は, f が全単射写像である.

証明. (必要条件) f が可逆であるとすれば, その逆写像 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ が定まる. $f(x_1) = f(x_2)$ であるとなれば,

$$x_1 = \text{id}_X(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = \text{id}_X(x_2) = x_2$$

より, f は単射である. 任意に $y \in Y$ をとれば, $y = \text{id}_Y(y) = f(f^{-1}(y))$ なので, $x = f^{-1}(y)$ とおけば $y = f(x)$ である. よって f は全射である. 従って f は全単射となる.

(十分条件) f を全単射な写像とする. f は全射なので, 各 $y \in Y$ に対してある $x \in X$ がとれて $y = f(x)$ となるものが存在する. f は単射なので, この x は y に対して一意的に定まる. そこで, $g: Y \rightarrow X$ を $g(y) = x$ とおけば

$$g(f(x)) = g(y) = x, \quad f(g(y)) = f(x) = y$$

を満たし, $g \circ f = \text{id}_X$, $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たす. これは f は可逆であることを表す. \square

● 2-5 : 集合の濃度

定義 2.7. X, Y を集合とする.

- 単射 $f: X \rightarrow Y$ が存在するとき, $|X| \leq |Y|$ と定め, [X の濃度は Y の濃度以下である](#) という.
- 全単射 $f: X \rightarrow Y$ が存在するとき, $|X| = |Y|$ と定め, [X の濃度と Y の濃度は等しい](#) という.
- $|X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ であるとき, $|X| < |Y|$ と定め, [X の濃度は Y の濃度未満である](#) という.
- X が有限集合であって, X の元の数が n であるとき, $|X| = n$ と定め, [X の濃度は n である](#) という.

例 2-6 (1) 自然数全体の集合 \mathbb{N} と正の偶数全体の集合 $2\mathbb{N} := \{2, 4, 6, \dots\}$ を考える. もちろん, $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ なので, $2\mathbb{N}$ は \mathbb{N} より少ない気がする. しかし, 写像

$$f: \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}; \quad n \mapsto 2n$$

を考えれば, これは全単射である. よって, $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$ である.

(2) 写像

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad n \mapsto \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}), \\ k & (n = 2k \text{ } (k \in \mathbb{N}) \text{ のとき}), \\ -k & (n = 2k + 1 \text{ } (k \in \mathbb{N}) \text{ のとき}) \end{cases}$$

は全単射であるから, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ である.

命題 2.8. X, Y, Z を集合とする. このとき, 次が成り立つ.

- $|X| \leq |X|$ である.
- $|X| = |Y|$ ならば $|Y| = |X|$ である.
- $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z|$ ならば, $|X| \leq |Z|$ が成り立つ.
- $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば, $|X| = |Y|$ が成り立つ*1.

証明. (1) X から X への恒等写像を考えれば, これは全単射であるが, 特に単射であるから $|X| \leq |X|$ である.

(2) $|X| = |Y|$ より, ある全単射な写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在する. このとき, 逆写像 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ をとれば, これも全単射であるから $|Y| = |X|$ が示された.

(3) $|X| \leq |Y|$ より, ある全単射な写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在する. また, $|Y| \leq |Z|$ より, ある全単射な写像 $g: Y \rightarrow Z$ が存在する. このとき, 合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ は単射であるので $|X| \leq |Z|$ が示された. \square

定義 2.9. 集合 X が [可算集合](#) であるとは, $|X| = |\mathbb{N}|$ であるときをいう. また, X が [高々可算集合](#) であるとは, X が有限集合であるか, 可算集合であるときをいう.

命題 2.10. (1) 可算集合と濃度の等しい集合は可算集合である.

(2) 可算集合の部分集合は高々可算集合である.

証明. (1) X を可算集合とし, $|X| = |Y|$ とする. X は可算集合なので, ある全単射な写像 $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ が存在する. また, 仮定から全単射な写像 $g: X \rightarrow Y$ が存在するが, 合成写像 $(f \circ g^{-1}): Y \rightarrow \mathbb{N}$ は全単射となり $|Y| = |\mathbb{N}|$ であることが示された.

*1 (4) は Bernstein の定理と呼ばれている.

(2) X を可算集合で、 Y をその部分集合とする。このとき、 X は \mathbb{N} としても一般性を失わない^{*2}。 $Y \subset X$ が有限集合でないとき、 Y は可算集合であることを示せばよい。 Y は自然数からなる集合であるから、要素を小さい順に並べることができて、これを

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$$

とおく。このとき、 Y は無限集合だから

$$g: \mathbb{N} \rightarrow Y; \quad n \mapsto y_n$$

は全単射な写像である。よって、 $|Y| = |\mathbb{N}|$ となり、 Y が可算集合であることが示された。 \square

例 2-7 $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ は可算集合である。これを示すために、 $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ の要素を次のように並べてみる。

$$\underbrace{(1, 1)}_{m+n=2}, \underbrace{(1, 2), (2, 1)}_{m+n=3}, \underbrace{(1, 3), (2, 2), (3, 1)}_{m+n=4}, \underbrace{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}_{m+n=5}, \dots$$

写像 $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を、 (m, n) がこの列の左端から $f(m, n)$ 番目に現れると定義する。すなわち、

$$f(m, n) := \frac{m(m+1)}{2} + m(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

と定めると、これは全単射である。よって、 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$ である。

例 2-8 (Cantor の対角線論法)。半開区間 $[0, 1)$ は高々可算集合ではない。これは背理法で証明される。まず、 $0.300\dots = 0.2999\dots$ のように 2 通りで小数点表示されることがあるので、このときは $0.300\dots$ の方を採用することにし、ある桁から先全てが 9 とはならないとしておく。

半開区間 $[0, 1)$ は明らかに有限集合ではないから、可算集合でないことを示せば良い。そこで、 $[0, 1)$ が可算集合であると仮定する。すると、全単射な写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1)$ が存在する。

$$f(n) = 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\dots \quad (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \text{ であり、ある番号から先が全て 9 ではない。})$$

と表しておこう。このとき、数列 b_1, b_2, b_3, \dots を次のように定義する。

$$b_m := \begin{cases} 1 & \text{if } a_{m,m} = 0, \\ 0 & \text{if } a_{m,m} \neq 0. \end{cases}$$

このとき、小数 $0.b_1b_2b_3\dots \in [0, 1)$ である。しかし、これはどの $n \in \mathbb{N}$ に対する $f(n)$ と異なる小数である。なぜならば、小数第 n 位を比べると、必ず $a_{n,n} \neq b_n$ だからである。これは、 f の全射性に反するので、矛盾である。ゆえに $[0, 1)$ は可算集合ではない。

^{*2} X は可算集合なので、全単射な写像 $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ が存在する。これの逆写像 $f^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow X$ を考えると、像 $f^{-1}(B)$ は B と濃度が等しい。よって、もし $f^{-1}(B)$ が高々可算集合であれば、 B も高々可算集合となる。従って、 $X = \mathbb{N}$ として初めても問題ない。

小テスト

小テスト 2-1 次の写像が単射であるか、全射であるか、全単射であるかを判定し、理由を簡潔に述べよ。

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(3) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 2n$

小テスト 2-2 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ によって定義する。次の集合を求めよ。

(1) $f([-2, 3])$

(2) $f^{-1}([-1, 4])$

(3) $f^{-1}(\{9\})$

小テスト 2-3 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = 2x + 1$, 写像 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) = x^2$ によって定義する。

(1) 合成写像 $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ。

(2) 合成写像 $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ。

(3) $g \circ f$ と $f \circ g$ は写像として等しいか答えよ。等しくない場合は、その根拠となる x の値を一つ示せ。