

4 順序集合・ハッセ図・束

● 4-1：半順序関係と半順序集合

前回学んだ同値関係は「反射的・対称的・推移的」な二項関係であった。ここでは「対称的」の代わりに「反対称的」を要求した関係、半順序関係を学ぶ。

定義 4.1. 集合 A 上の二項関係 \leq が以下の 3 条件を満たすとき、 \leq を A 上の半順序関係という。

- (a) 反射的：任意の $a \in A$ に対して $a \leq a$ が成り立つ。
- (b) 反対称的： $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$ が成り立つ。
- (c) 推移的： $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ が成り立つ。

集合 A と A 上の半順序関係 \leq の組 (A, \leq) を半順序集合という。

半順序関係において、 $a \leq b$ かつ $a \neq b$ であるとき $a < b$ と書き、「 a は b より真に小さい」という。また $a \leq b$ のとき $b \geq a$ 、 $a < b$ のとき $b > a$ とも書く。

同値関係と半順序関係を満たすべき性質で比較すると次のようになる（推移性は両者に共通）。

二項関係	反射的	対称的	反対称的	推移的
同値関係	✓	✓		✓
半順序関係	✓		✓	✓

例 4-1 以下はいずれも代表的な半順序集合の例である。

(1) 実数の大小関係： (\mathbb{R}, \leq) は半順序集合である。 $a \leq a$ (反射的)、 $a \leq b$ かつ $b \leq a \Rightarrow a = b$ (反対称的)、 $a \leq b$ かつ $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (推移的) がいずれも成り立つ。

(2) 整除関係：自然数の集合 \mathbb{N} 上で $a \mid b$ (a が b を割り切る) を二項関係とする組 (\mathbb{N}, \mid) は半順序集合である。 $a \mid a$ ($a = 1 \cdot a$ より、反射的)、 $a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$ (反対称的)、 $a \mid b$ かつ $b \mid c$ ならば $a \mid c$ (推移的) が成り立つ。

(3) 冪集合の包含関係：集合 X の冪集合 2^X 上の包含関係 \subset を入れた組 $(2^X, \subset)$ は半順序集合である。 $A \subset A$ (反射的)、 $A \subset B$ かつ $B \subset A \Rightarrow A = B$ (反対称的)、 $A \subset B$ かつ $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (推移的) が成り立つ。

● 4-2：全順序

半順序集合 (A, \leq) において、 $a, b \in A$ が比較可能であるとは、 $a \leq b$ または $b \leq a$ のいずれかが成り立つことをいう。 $a \not\leq b$ かつ $b \not\leq a$ であるとき、 a と b は比較不能であるという。

定義 4.2. 半順序集合 (A, \leq) において、任意の 2 元 $a, b \in A$ が比較可能であるとき、 (A, \leq) を全順序集合 (または線形順序集合) という。

例 4-2 (1) (\mathbb{R}, \leq) は全順序集合である。任意の実数 a, b に対して $a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立つ。

(2) (\mathbb{N}, \mid) は全順序集合ではない。例えば 2 と 3 は比較不能であり、 $2 \nmid 3$ かつ $3 \nmid 2$ である。

● 4-3：ハッセ図

半順序集合の構造を視覚的に表すハッセ図を学ぶ。その基礎となる被覆関係を定義する。

定義 4.3. 半順序集合 (A, \leq) において, $a < b$ かつ $a < c < b$ となる $c \in A$ が存在しないとき, 「 b は a を被覆する」といい, $a < b$ と書く. この関係 \leq を被覆関係という.

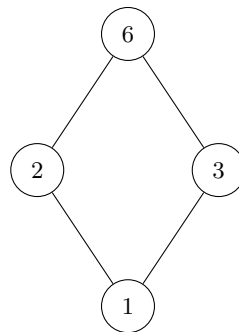
ハッセ図とは, 半順序集合 (A, \leq) の元を頂点として, 被覆関係 $a < b$ がある元の対に対してのみ線分で結び, 大きい方の元を上配置した図である. 矢印は省略し, 「上にあれば大きい」という約束で向きを表す.

ハッセ図の手順

- (1) 各元を点として配置し, $a < b$ のとき a を b より下に置く.
- (2) 被覆関係 $a < b$ にある対のみを線分で結ぶ (直接の被覆でない $a < b$ は線分を引かない).
- (3) 矢印は省略する (下から上への向きが半順序の大小関係を表す).

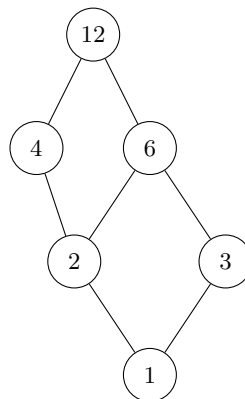
例 4-3 $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ (6 の正の約数) に整除関係 $|$ を入れた半順序集合のハッセ図を描く.

被覆関係: $1 < 2, 1 < 3, 2 < 6, 3 < 6$. ($1 < 6$ は被覆関係でない: $1 < 2 < 6$ となる中間元 2 が存在するから.)



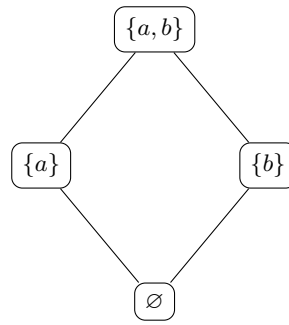
例 4-4 $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ (12 の正の約数) に整除関係 $|$ を入れた半順序集合のハッセ図を描く.

被覆関係: $1 < 2, 1 < 3, 2 < 4, 2 < 6, 3 < 6, 4 < 12, 6 < 12$.



例 4-5 $X = \{a, b\}$ の冪集合 $2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ に包含関係 \subset を入れた半順序集合のハッセ図を描く.

被覆関係: $\emptyset < \{a\}, \emptyset < \{b\}, \{a\} < \{a, b\}, \{b\} < \{a, b\}$.



● 4-4：最大元・最小元・極大元・極小元

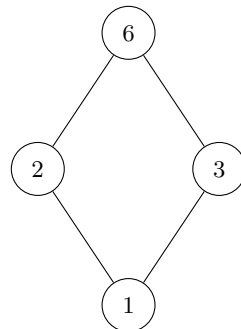
ハッセ図を通じて、半順序集合における特別な元を定義する。

定義 4.4. 半順序集合 (A, \leq) において、

- (1) $m \in A$ が任意の $a \in A$ に対して $a \leq m$ を満たすとき、 m を A の**最大元**という。
- (2) $m \in A$ が任意の $a \in A$ に対して $m \leq a$ を満たすとき、 m を A の**最小元**という。
- (3) $m \in A$ に対して $m < a$ となる $a \in A$ が存在しないとき、 m を A の**極大元**という。
- (4) $m \in A$ に対して $a < m$ となる $a \in A$ が存在しないとき、 m を A の**極小元**という。

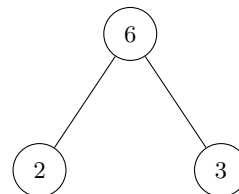
最大元・最小元が存在すれば一意に定まる（ハッセ図の「唯一の最上段・最下段の元」に対応）。一方、極大元・極小元は複数存在することがある（ハッセ図の「それより上に辺が出ていない元」全体）。

例 4-6 下図の各ハッセ図において最大元・最小元・極大元・極小元を確認する。



$(D(6), |)$

最大元：6，最小元：1



$(\{2, 3, 6\}, |)$

最大元：6，最小元：なし

極小元：2 と 3 (2 つある)

● 4-5：束

定義 4.5. 半順序集合 (A, \leq) と A の部分集合 $S \subset A$ に対して、

- (1) $x \leq u$ が全ての $x \in S$ に対して成り立つ $u \in A$ を、 S の**上界**という。
- (2) $l \leq x$ が全ての $x \in S$ に対して成り立つ $l \in A$ を、 S の**下界**という。
- (3) S の上界の中で最小の元を S の**上限**（または**最小上界**）といい、 $\sup S$ と書く。
- (4) S の下界の中で最大の元を S の**下限**（または**最大下界**）といい、 $\inf S$ と書く。

特に 2 元 $a, b \in A$ に対して、 $\{a, b\}$ の上限と下限を次のように書く：

$$a \vee b = \sup\{a, b\} \quad (\text{結び}), \quad a \wedge b = \inf\{a, b\} \quad (\text{交わり}).$$

定義 4.6. 半順序集合 (A, \leq) において, 任意の 2 元 $a, b \in A$ に対して $a \vee b$ と $a \wedge b$ がともに A の元として存在するとき, (A, \leq) を **束** という.

例 4-7 $(D(6), |) = (\{1, 2, 3, 6\}, |)$ は束である. 任意の $a, b \in D(6)$ に対して, $a \vee b = \text{lcm}(a, b)$ (最小公倍数), $a \wedge b = \text{gcd}(a, b)$ (最大公約数) が $D(6)$ の元として存在する (全ての対について以下の表で確認できる).

$a \vee b$	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

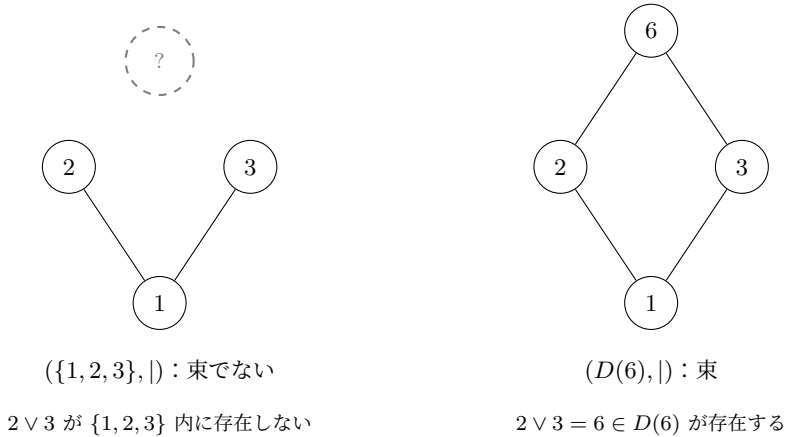
$a \wedge b$	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

全ての結果が $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ の元であることが確認できる. 例えば $2 \vee 3 = \text{lcm}(2, 3) = 6$, $2 \wedge 3 = \text{gcd}(2, 3) = 1$ である.

例 4-8 集合 X の冪集合 $(2^X, \subset)$ は束である. 任意の $A, B \in 2^X$ に対して $A \vee B = A \cup B$, $A \wedge B = A \cap B$ が成り立ち, いずれも 2^X の元である.

例 4-9 (束でない例) $B = \{1, 2, 3\}$ に整除関係 $|$ を入れた半順序集合 $(B, |)$ は束ではない. 2 と 3 の共通の上界は $\text{lcm}(2, 3) = 6$ だが $6 \notin B$ であり, B の中に上界が存在しない. よって $2 \vee 3$ が B の元として存在しない.

次の 2 つのハッセ図を比較すると, 元 6 の有無が束かどうかを左右することがわかる:



定理 4.7. 任意の束 (A, \leq) において, 結び \vee と交わり \wedge は次の性質を満たす:

- (1) **交換律**: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (2) **結合律**: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
- (3) **吸収律**: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ (4) **冪等律**: $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$

証明. 結びについてのみ示す (交わりについても対称的な議論による).

- (1) (交換律) $\{a, b\} = \{b, a\}$ であるから $\text{sup}\{a, b\} = \text{sup}\{b, a\}$, すなわち $a \vee b = b \vee a$.
- (4) (冪等律) $a \leq a$ より a は $\{a, a\}$ の上界であり, 任意の上界 u に対して $a \leq u$ が成り立つ. よって $a \vee a = \text{sup}\{a, a\} = a$.
- (3) (吸収律) $a \wedge b \leq a$ であるから, a は $\{a, a \wedge b\}$ の上界である. また任意の上界 u に対して $a \leq u$ が成り立つから, a は最小上界, すなわち $a \vee (a \wedge b) = a$.
- (2) (結合律) $s = a \vee (b \vee c)$ とおく. s の定義より $a \leq s$, また $b \leq b \vee c \leq s$, $c \leq b \vee c \leq s$ が成り立つ

ので s は $\{a, b, c\}$ の上界である。よって $a \vee b \leq s$ となり $(a \vee b) \vee c \leq s$ 。逆に, $a \leq a \vee b \leq (a \vee b) \vee c$, $b \leq a \vee b \leq (a \vee b) \vee c$, $c \leq (a \vee b) \vee c$ より $(a \vee b) \vee c$ も $\{a, b, c\}$ の上界であるから $s \leq (a \vee b) \vee c$ 。よって $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$. □ □

補足 4.8. 集合演算における和集合 \cup と共通部分 \cap も交換律・結合律・吸収律を満たすことを第 1 回で学んだ (定理 1.1~1.3)。これは $(2^X, \subset)$ が束をなすことと対応している。

補足 4.9. 一般に, n の正の約数全体 $D(n)$ に整除関係 $|$ を入れた $(D(n), |)$ は束である。結びは最小公倍数 lcm, 交わりは最大公約数 gcd によって与えられる。