

5 推論と証明

● 5-1：命題と論理結合子

数学において、真 (true) か偽 (false) かのどちらか一方に定まる文や式を**命題**という。命題 P が真のとき $P = 1$ (または T), 偽のとき $P = 0$ (または F) と表す。

例 5-1 次の各文の真偽を確認する。

- (1) 「2 は偶数である。」 (命題, 真)
- (2) 「全ての素数は奇数である。」 (命題, 偽 : 2 は偶数の素数)
- (3) 「 x は整数である。」 (命題でない : x の値によって真偽が変わる)

命題 P, Q から、**論理結合子**を用いて新しい命題を作ることができる。

記号	名称	読み方	真になる条件
$\neg P$	否定	「 P でない」	P が偽のとき
$P \wedge Q$	連言 (論理積)	「 P かつ Q 」	P, Q がともに真のとき
$P \vee Q$	選言 (論理和)	「 P または Q 」	P, Q の少なくとも一方が真のとき
$P \Rightarrow Q$	含意 (条件文)	「 P ならば Q 」	P が偽, またはともに真のとき
$P \Leftrightarrow Q$	双条件 (同値)	「 P と Q は同値」	P, Q の真偽が一致するとき

各論理結合子の真偽値を全ての場合について列挙した表を**真理値表** (truth table) という。1 変数の場合は 2 行, 2 変数の場合は $2^2 = 4$ 行となる。

P	$\neg P$	P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1

各定義の根拠を述べる。

- $\neg P$ (否定) : P の真偽を反転させる。「 P でない」という日常表現に対応する。
- $P \wedge Q$ (連言) : 両方が真のときのみ真とする。「 P かつ Q 」が成り立つのは両方成り立つときであるという日常的な意味に対応する。
- $P \vee Q$ (選言) : 少なくとも一方が真のとき真とする。日常語の「または」は排他的に (両方成立を除いて) 用いられることもあるが, 論理学では**包含的論理和** (両方成立も許す) として定義する。
- $P \Rightarrow Q$ (含意) : 最も注意を要する結合子である。「 P ならば Q 」という含意が**偽**となるのは, 仮定 P が真であるにもかかわらず結論 Q が偽の場合 (2 行目) に限る。 P が偽のとき (3・4 行目), 条件文は Q について何も主張しないため**真**と定める (**空虚な真**, vacuously true)。例えば「 n が 4 の倍数ならば n は偶数である」という命題は, $n = 3$ (4 の倍数でない) のとき, この命題が「偽」とはみなさない。また, $P \Rightarrow Q$ は $\neg P \vee Q$ と同値であることも真理値表から確認できる。

- $P \Leftrightarrow Q$ (双条件): P と Q の真偽が一致するとき真とする. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ と同値であり, 「 P であるための必要十分条件は Q 」と同じ意味である.

命題 $P \Rightarrow Q$ (「 P ならば Q 」) を **条件文** といい, P を **仮定**, Q を **結論** という. 条件文 $P \Rightarrow Q$ に対して, 次の 3 つの命題を定義する:

- 逆**: $Q \Rightarrow P$ (仮定と結論を入れ替えたもの)
- 裏**: $\neg P \Rightarrow \neg Q$ (仮定と結論をともに否定したもの)
- 対偶**: $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (逆の裏, または裏の逆)

定理 5.1 (対偶の真偽). 条件文 $P \Rightarrow Q$ とその対偶 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ の真偽は常に一致する. 一方, 逆と裏は元の命題と真偽が異なる場合がある.

証明. P と Q の真偽の組み合わせは全部で 4 通りある. 以下の **真理値表** において, 各列の真偽値を確認する.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$Q \Rightarrow P$ (逆)
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1

$P \Rightarrow Q$ と $\neg Q \Rightarrow \neg P$ の列は全ての行で一致しており, 両者の真偽は常に同じである. 一方, 逆 $Q \Rightarrow P$ は 2 行目・3 行目で $P \Rightarrow Q$ と真偽が異なり, 常には一致しない (裏 $\neg P \Rightarrow \neg Q$ も対偶の対偶が元の命題であることから, 逆と同様に常には一致しない). \square

● 5-2: 証明の基本的な方法

命題 $P \Rightarrow Q$ を証明するための代表的な手法を紹介する.

- **直接証明法**: P が真であると仮定し, 論理的推論によって Q が真であることを直接示す.
- **対偶法**: 定理 5.1 により, $P \Rightarrow Q$ の代わりにその対偶 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ を直接証明法で示す.

例 5-2 (対偶法) 整数 n について, 「 n^2 が偶数ならば n は偶数である」を証明する.

証明. 対偶「 n が奇数ならば n^2 は奇数である」を示す. n が奇数であると仮定すると, ある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ と表せる. このとき,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

となり, n^2 は奇数である. よって対偶が成り立つので, もとの命題も真である. \square

● 5-3: 背理法

命題 P を証明するために, 「 P が偽である」と仮定して矛盾を導く手法を **背理法** (帰謬法) という.

定理 5.2 (背理法の原理). 命題 P が真であることは, $\neg P$ を仮定したとき矛盾 \perp が生じることと同値である:

$$P \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow \perp).$$

背理法の手順:

Step 1. P が偽であると仮定する ($\neg P$ を仮定).

Step 2. $\neg P$ から論理的な推論を進める.

Step 3. 既知の事実または $\neg P$ 自身と矛盾する結論を導く.

Step 4. 矛盾が生じたので $\neg P$ は偽, よって P は真である.

例 5-3 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明する.

証明. $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する. このとき, 互いに素な自然数 p, q を用いて $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ と書ける. 両辺を 2 乗すると

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2$$

となるので, p^2 は偶数である. 例 5-2 より p は偶数であるから, ある自然数 m を用いて $p = 2m$ と書ける. 代入すると

$$(2m)^2 = 2q^2 \implies 4m^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2m^2$$

となり, q^2 は偶数であるから, 例 5-2 より q も偶数である. しかし p と q がともに偶数であることは, p と q が互いに素であるという仮定に矛盾する. よって $\sqrt{2}$ は無理数である. \square

例 5-4 素数が無限に存在することを証明する.

証明. 素数の個数が有限であると仮定し, 全ての素数を p_1, p_2, \dots, p_n と列挙できるとする. 自然数

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

を考えると, $N > 1$ であるから N は少なくとも 1 つの素因数 p を持つ. ところが, 任意の p_i について N を p_i で割ると余りが 1 となるため, p はどの p_i とも一致しない. これは p_1, p_2, \dots, p_n が全ての素数であるという仮定に矛盾する. よって素数は無限に存在する. \square

● 5-4: 数学的帰納法

自然数 n に関する命題 $P(n)$ が全ての自然数 n について成り立つことを示す手法に**数学的帰納法**がある. その証明には, 自然数の**整列性** (well-ordering principle) を用いる:

整列性: \mathbb{N} の空でない任意の部分集合は, 必ず最小元を持つ.

定理 5.3 (数学的帰納法の原理). 自然数 n に関する命題 $P(n)$ について, 次の 2 条件が成り立つとする.

- (i) **(基底)** $P(1)$ が真である.
- (ii) **(帰納段階)** 任意の自然数 n に対して, $P(n)$ が真ならば $P(n+1)$ も真である.

このとき, 全ての自然数 n に対して $P(n)$ が真である.

証明. $P(n)$ が真でない自然数全体の集合を $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ が偽} \}$ とおく. $S = \emptyset$ を示せばよい.

$S \neq \emptyset$ と仮定する. 整列性より S の最小元 m が存在する. 条件 (i) より $P(1)$ は真なので $1 \notin S$, よって $m \geq 2$ である. $m-1 \geq 1$ は自然数であり, $m-1 < m$ より $m-1 \notin S$ (m の最小性による). したがって $P(m-1)$ は真である. 条件 (ii) を $n = m-1$ に適用すると $P(m)$ も真となり, $m \notin S$ を得る. これは $m \in S$ に矛盾する.

よって $S = \emptyset$, すなわち全ての自然数 n に対して $P(n)$ が真である. \square

定理 5.4 (数学的帰納法の一般形). 整数 n_0 と, $n \geq n_0$ なる整数 n に関する命題 $P(n)$ について, 次の 2 条件が成り立つとする.

- (i) **(基底)** $P(n_0)$ が真である。
(ii) **(帰納段階)** 任意の整数 $n \geq n_0$ に対して, $P(n)$ が真ならば $P(n+1)$ も真である。

このとき, 全ての整数 $n \geq n_0$ に対して $P(n)$ が真である。

証明. $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0, P(n) \text{ が偽}\}$ とおく. $S \neq \emptyset$ と仮定すると整列性より最小元 m が存在する. 条件 (i) より $m > n_0$ であり, $m-1 \geq n_0$ かつ $m-1 \notin S$ (m の最小性による) から $P(m-1)$ は真. 条件 (ii) より $P(m)$ も真となり $m \notin S$, 矛盾する. よって $S = \emptyset$. \square

定理 5.5 (強い帰納法 (完全帰納法)). 自然数 n に関する命題 $P(n)$ について, 次の 2 条件が成り立つとする。

- (i) **(基底)** $P(1)$ が真である。
(ii) **(帰納段階)** 任意の自然数 n に対して, $P(1), P(2), \dots, P(n)$ が全て真ならば $P(n+1)$ も真である。

このとき, 全ての自然数 n に対して $P(n)$ が真である。

証明. $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ が偽}\}$ とおき, $S \neq \emptyset$ と仮定する. 整列性より S の最小元 m が存在する. 条件 (i) より $m \geq 2$ であり, m の最小性から $P(1), P(2), \dots, P(m-1)$ は全て真である. 条件 (ii) を $n = m-1$ に適用すると $P(m)$ も真となり, $m \notin S$, 矛盾する. よって $S = \emptyset$. \square

補足 5.6. 定理 5.3 (弱い帰納法) では帰納段階で「 $P(n)$ が真」のみを仮定するが, 定理 5.5 (強い帰納法) では「 $P(1), P(2), \dots, P(n)$ が全て真」を仮定できる。

(同等の証明力をもつ理由) 強い帰納法が弱い帰納法より強い仮定を使うことは明らかであるが, 逆に弱い帰納法でも強い帰納法と同じことを証明できる. これを確認するために, 命題 $Q(n)$ を

$$Q(n) := P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n)$$

と定義する. 強い帰納法の条件 (i)(ii) が成り立つとき,

- $Q(1) = P(1)$ は真である (条件 (i) より).
- $Q(n)$ が真, すなわち $P(1), \dots, P(n)$ が全て真であれば, 条件 (ii) より $P(n+1)$ も真となり, $Q(n+1) = Q(n) \wedge P(n+1)$ も真である.

よって弱い帰納法 (定理 5.3) を $Q(n)$ に適用すると, 全ての自然数 n に対して $Q(n)$ が真, したがって $P(n)$ も真であることが従う. このように, 強い帰納法による証明は常に弱い帰納法に書き換えることができる。

(使い分けの基準) $P(n+1)$ の証明に $P(n)$ だけでなくそれ以前の $P(k)$ ($k \leq n$) の情報も必要な場合には, 強い帰納法が自然に適用できる. 例えば, 「 $n \geq 2$ なる任意の整数は素因数を持つ」を示す際, $n+1$ が合成数のとき $n+1 = ab$ ($2 \leq a, b < n+1$) と分解できるが, a は必ずしも n とは限らない. したがって「 $a \leq n$ に対して $P(a)$ が真」という情報が必要となり, このような場合に強い帰納法を用いる。

例 5-5 全ての自然数 n に対して次の等式が成り立つことを証明する:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

証明. [基底] $n = 1$ のとき, 左辺 = 1, 右辺 = $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ となり成り立つ。

[帰納段階] ある自然数 n に対して $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ が成り立つと仮定する. このとき,

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

となり, $n+1$ のときも成り立つ. 以上より, 全ての自然数 n に対して成り立つ. \square

例 5-6 全ての整数 $n \geq 5$ に対して $2^n > n^2$ が成り立つことを証明する (定理 5.4, $n_0 = 5$).

証明. [基底] $n = 5$ のとき, $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ より成り立つ.

[帰納段階] 整数 $n \geq 5$ に対して $2^n > n^2$ が成り立つと仮定する. $n \geq 5 \geq 3$ のとき $n^2 \geq 3n > 2n + 1$ が成り立つので $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2n^2$. よって

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 > (n + 1)^2$$

となり, $n + 1$ のときも成り立つ. 以上より, 全ての整数 $n \geq 5$ に対して $2^n > n^2$ が成り立つ. \square

● 5-5: 鳩ノ巣原理

定理 5.7 (鳩ノ巣原理 (Pigeonhole Principle)). n 個の箱に $n + 1$ 個以上のものを入れるとき, 少なくとも 1 つの箱には 2 個以上のものが入る.

証明. どの箱にも 1 個以下しか入らないと仮定すると, 全体に入るものの個数は多くとも n 個となる. これは $n + 1$ 個以上のものがあるという仮定に矛盾する. よって少なくとも 1 つの箱に 2 個以上が入る. \square

より一般には次が成り立つ.

定理 5.8 (一般化された鳩ノ巣原理). n 個の箱に m 個のものを入れるとき, 少なくとも 1 つの箱には $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ 個以上のものが入る. ただし $\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数 (天井関数) を表す.

証明. どの箱にも $\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1$ 個以下しか入らないとすると, 全体の個数は多くとも

$$n \cdot \left(\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1 \right) < n \cdot \frac{m}{n} = m$$

となり, m 個のものを入れるという仮定に矛盾する. よって少なくとも 1 つの箱に $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ 個以上が入る. \square

例 5-7 (誕生日問題) 367 人のクラスには, 誕生日が同じ人が少なくとも 2 人いる.

(説明) 1 年はうるう年でも最大 366 日である. 367 人の学生 (もの) を 366 日 (箱) に対応させると, 定理 5.7 より少なくとも 1 つの誕生日に 2 人以上が属する.

例 5-8 1 から $2n$ までの整数から $n + 1$ 個を選ぶと, 一方が他方を割り切る 2 つの整数が必ず存在する.

証明. 1 以上 $2n$ 以下の各整数 m は, ある非負整数 k と奇数 q ($1 \leq q \leq 2n - 1$) を用いて $m = 2^k q$ と一意に表せる (q は m の奇数部分). 奇数部分 q がとり得る値は $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ の n 種類である (箱). $n + 1$ 個の整数を選ぶと, 定理 5.7 より奇数部分が一致する 2 つの整数 $a = 2^j q$, $b = 2^k q$ ($j < k$ とする) が存在し, $a \mid b$ となる. \square

例 5-9 1×1 の正方形の内部または周上に 5 点を置くと, 少なくとも 2 点の距離が $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 以下になる.

(説明) 正方形を $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ の小正方形 4 個に分割する (図参照). 5 点を 4 個の小正方形 (箱) に対応させると, 定理 5.7 より 1 つの小正方形に 2 点以上が入る. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ の正方形の対角線の長さは $\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから, その 2 点の距離は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 以下である.

①	②
③	④