6 数え上げ

有限集合の要素数を数える理論を**数え上げ**（counting）あるいは**組合せ論**（combinatorics）という．本講義の最終目標は，次のような一見「数えにくい」問題を，**全単射（一対一対応）**の構成によって**数えずに**解決することである．

【中心問題】 m, n を自然数とする．不等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす非負整数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ の個数と，不等式

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq m \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす非負整数の組 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の個数は一致することを示せ．

例 6-1（小さな場合の観察） $m = 2,\ n = 3$ のとき，不等式 $x_1 + x_2 \leq 3$ を満たす非負整数の組は

$$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (2,1), (1,2), (2,0), (0,2), (3,0), (0,3)$$

の 10 個．一方，不等式 $y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$ を満たす非負整数の組は

$$(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)$$

の 10 個．**確かに一致する．** しかし m, n が一般のときに全て列挙して数えるのは不可能に近い．

そこで以下では，まず基本的な数え上げの道具を整備し（6-1〜6-5），最後に「玉の並び」を仲立ちとした**全単射**によって中心問題を解決する（6-6）．以下，有限集合 A の要素数を $|A|$ と表す．

● 6-1：積の法則と和の法則

定理 6.1 (積の法則・和の法則)．有限集合 A, B に対して，次が成り立つ．

(1) **積の法則**：$|A \times B| = |A| \cdot |B|$．より一般に，$k$ 段階の操作で各段階の選び方が $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 通りあるとき，全体の選び方は $n_1 n_2 \cdots n_k$ 通り．

(2) **和の法則**：$A \cap B = \varnothing$ のとき $|A \cup B| = |A| + |B|$．より一般に，互いに重ならない k 個の場合の選び方が $n_1, \ldots, n_k$ 通りずつあるとき，全体は $n_1 + \cdots + n_k$ 通り．

例 6-2 集合 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合の総数は 2^n 個である．実際，部分集合 $T \subseteq S$ を定めることは各要素 $i \in S$ について「$i \in T$ か $i \notin T$ か」を独立に決めることと同じで，要素は n 個・各々 2 通りなので積の法則より 2^n 通り．

● 6-2：順列

n 個の異なるものから r 個を選び順序を区別して並べる方法の数を**順列**といい，${}_n\mathrm{P}_r$ と書く．

定理 6.2 (順列の公式)．$0 \leq r \leq n$ なる整数 n, r に対して，

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

ただし $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$（**階乗**）であり，$0! = 1$ と約束する．

証明. r 個の位置に左から順に要素を並べる．第 1 位置は n 通り，第 2 位置は残り $n-1$ 通り，…，第 r 位置は $n-r+1$ 通り選べる．積の法則より $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 通り． □

例 6-3　5 人から 3 人を選んで一列に並ばせる方法は ${}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot4\cdot3 = 60$ 通り．重複を許して n 個から r 個並べる**重複順列**は各位置に独立に n 通りずつあるから n^r 個．

• 6-3：組合せと二項定理

n 個の異なるものから順序を区別せず r 個を選ぶ方法の数を**組合せ**といい，${}_n\mathrm{C}_r = \binom{n}{r}$ と書く（**二項係数**).

定理 6.3 (組合せの公式)**.** $0 \le r \le n$ なる整数 n, r に対して，

$$\binom{n}{r} = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

証明. n 個から r 個を選んで並べる順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ を，次の 2 段階の操作で作ると考える．

Step 1. n 個から r 個を**順序を区別せずに**選ぶ　（$\binom{n}{r}$ 通り）
Step 2. 選んだ r 個を一列に**並べる**　（$r!$ 通り）

積の法則より

$${}_n\mathrm{P}_r = \binom{n}{r}\cdot r!.$$

両辺を $r!$ で割れば，定理 6.2 の ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ と合わせて

$$\binom{n}{r} = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

□

命題 6.4 (二項係数の基本性質)**.** $0 \le r \le n$ なる整数 n, r に対して，次が成り立つ．

(1) **対称性**：

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

(2) **パスカルの規則**（$1 \le r \le n$ のとき）：

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

(3) **総和**：

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} = 2^n.$$

証明. **(1)**：n 個から r 個を「選ぶ」ことと，残す $n-r$ 個を「選ばないと決める」ことは同じ操作である．よって両者の場合の数は等しく $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

(2)：n 個のうち特定の要素 x を 1 つ固定し，r 個の選び方を x の扱いで場合分けする．

ⓘ x を選ぶ場合：残り $n-1$ 個から $r-1$ 個を選ぶので $\binom{n-1}{r-1}$ 通り．
ⓘⓘ x を選ばない場合：残り $n-1$ 個から r 個を選ぶので $\binom{n-1}{r}$ 通り．

これらは互いに重ならないので和の法則より $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

(3)：左辺 $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$ は「n 個から $0, 1, \ldots, n$ 個選ぶ場合の数の総和」であり，これは n 元集合 S の部分集合の総数に等しい．例 6-2 より 2^n 個．□

パスカルの規則を表にしたものを**パスカルの三角形**という．$\binom{n}{r}$ を上から n 行目，左から r 番目に並べると，各内側の値は左上と真上の値の和に等しい．

$n\backslash r$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

定理 6.5 (二項定理). 任意の実数 x, y と自然数 n に対して

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r.$$

証明. $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{n\ 個}$ を展開すると，各因子から x または y を選んだ積の和になる．n 個の因子のうち y を選ぶものを r 個指定する方法は $\binom{n}{r}$ 通り，その項は $x^{n-r}y^r$．総和を取って結論を得る． □

例 6-4　二項定理で $x = y = 1$ とすると $2^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$（命題 6.4 の総和の別証）．

● 6-4：重複組合せ（仕切り法）

n 種類のものから**重複を許して** r 個を選ぶ方法（順序は区別しない）の数を**重複組合せ**といい，${}_n\mathrm{H}_r$ と書く．次の公式が中心問題の解決にも本質的に効く．

定理 6.6 (重複組合せの公式). $n \geq 1$，$r \geq 0$ なる整数 n, r に対して，

$${}_n\mathrm{H}_r = \binom{n+r-1}{r}.$$

証明. 種類 i を選んだ個数を $x_i \geq 0$ とすると，重複組合せの選び方は

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r \quad (x_i \geq 0 \text{ は整数})$$

の非負整数解の個数に等しい．各解に対し，r 個の $\circ$ と $n-1$ 個の仕切り $|$ を

$$\underbrace{\circ\ \circ\ \cdots\ \circ}_{x_1\ 個} \Big|\ \underbrace{\circ\ \cdots\ \circ}_{x_2\ 個} \Big|\ \cdots \Big|\ \underbrace{\circ\ \cdots\ \circ}_{x_n\ 個}$$

と一列に並べたものを対応させる．これは $x_i \geq 0$ なる解と $r + (n-1)$ 個の場所の中から $\circ$ を r 個置く位置の組との**一対一対応（全単射）**を与える．従って求める個数は $\binom{n+r-1}{r}$ である． □

系 6.7 (等式の場合の言い換え). 非負整数解の個数について，

$$\#\{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \mid x_1 + \cdots + x_m = n\} = \binom{m+n-1}{n}.$$

例 6-5　3 種類のお菓子から重複を許して 5 個選ぶ方法は ${}_3\mathrm{H}_5 = \binom{7}{5} = 21$ 通り．

● 6-5：不等式の場合への拡張

中心問題は**不等式** $x_1 + \cdots + x_m \leq n$ なので，これを等式に帰着させる．

命題 6.8 (不等式の解の個数)**.** m, n を自然数とする．不等式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ を満たす非負整数の組 $(x_1, \ldots, x_m)$ の個数は

$$\binom{m+n}{n}$$

である．

証明. 余裕分 $x_{m+1} := n - (x_1 + \cdots + x_m) \geq 0$ を導入する．x_{m+1} は 0 以上の整数であり，

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n$$

を満たす．逆に右辺の等式の任意の非負整数解から x_{m+1} を取り除けば不等式の解が得られる．従って，不等式の非負整数解と $m+1$ 変数の等式の非負整数解の間に**全単射**があり，系 6.7 より個数は $\binom{(m+1)+n-1}{n} = \binom{m+n}{n}$ である．□

これを用いると，すでに中心問題は次のように**計算によって**解ける：不等式①の解の個数は $\binom{m+n}{n}$，不等式②の解の個数は $\binom{n+m}{m} = \binom{m+n}{m}$．二項係数の対称性（命題 6.4）より $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$ なので両者は一致する．

しかしこれは「両辺を計算してから比べる」証明である．次節では，**個数を全く計算せずに，2 つの解集合の間に直接全単射を作る**ことで，もっと鮮やかに一致を示そう．

• 6-6：全単射による解決——玉の並びによる対応

定理 6.9 (中心問題の解決)**.** m, n を自然数とする．不等式①を満たす非負整数の組 $(x_1, \ldots, x_m)$ の全体と，不等式②を満たす非負整数の組 $(y_1, \ldots, y_n)$ の全体の間に**全単射**が存在する．特に両者の個数は一致する．

証明. $m+1$ 個の白玉 ○ と $n+1$ 個の黒玉 ● を用意し，**左端が ○，右端が ● となるように**一列に並べることを考える．このような並びの全体を $\Omega_{m,n}$ とおく．

例として $m = 2, n = 3$ の場合（○ が 3 個，● が 4 個）の並びの一つ：

○ ● ● ○ ● ○ ●.

並び $\omega \in \Omega_{m,n}$ から 2 組の非負整数の組を読み取る規則を定める．

- **（左→右の読み）**　左端から数えて i 番目の ○ と $(i+1)$ 番目の ○ の間にある ● の個数を x_i とする $(i = 1, 2, \ldots, m)$.
- **（右→左の読み）**　右端から数えて j 番目の ● と $(j+1)$ 番目の ● の間にある ○ の個数を y_j とする $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

上の例では，左→右の読みで $(x_1, x_2) = (2, 1)$，右→左の読みで $(y_1, y_2, y_3) = (1, 1, 0)$ となり，それぞれ $x_1 + x_2 = 3 \leq 3$，$y_1 + y_2 + y_3 = 2 \leq 2$ を満たすので $(2, 1)$ は①の解，$(1, 1, 0)$ は②の解である．

一般に，並び ω から得た $(x_1, \ldots, x_m)$ は①の解，$(y_1, \ldots, y_n)$ は②の解になる． 実際，○ は $m+1$ 個あり「○ と ○ の間」は m 箇所あるので x_i が m 個定まる．それらの和 $x_1 + \cdots + x_m$ は「○ たちに挟まれた ● の個数」であって，残りの ● は右端の ● および最初の ○ より左の ●（0 個）に押しやられる．従って $x_1 + \cdots + x_m \leq (\text{●の総数}) - 1 = n$．$(y_1, \ldots, y_n)$ についても同様.

逆に，$(x_1, \ldots, x_m)$ が①の解，$(y_1, \ldots, y_n)$ が②の解ならば，それぞれに対応する $\omega \in \Omega_{m,n}$ が一意に定まる（左→右の読みは並びを完全に決定する）.

以上より，次の 2 つの写像を構成した：

$$\Phi : \Omega_{m,n} \longrightarrow S_1, \quad \omega \longmapsto (x_1, \ldots, x_m), \qquad \Psi : \Omega_{m,n} \longrightarrow S_2, \quad \omega \longmapsto (y_1, \ldots, y_n),$$

ここで S_1, S_2 はそれぞれ①, ②の解全体の集合．Φ, Ψ はいずれも**全単射**であるから，合成

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : S_1 \longrightarrow S_2$$

は S_1 から S_2 への全単射を与える．従って $|S_1| = |S_2|$. □

補足 6.10. この証明の本質は,「●,○ の並びを共通の仲立ち（中間表現）として，2 つの異なる集合の元を同時にコード化した」点にある．これは**全単射的証明**（bijective proof）と呼ばれる強力な手法であり，両辺を別々に計算してから等しさを確かめる証明よりはるかに鮮明である．数え上げ問題に出会ったときは「両辺を別々に計算する」と「一対一対応を作る」の 2 つの戦略を意識するとよい．

【まとめ：4 種類の数え上げ】

	順序を区別する	順序を区別しない
重複を許さない	順列 ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	組合せ ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
重複を許す	重複順列 n^r	重複組合せ ${}_n\mathrm{H}_r = \binom{n+r-1}{r}$