0 集合と写像などの復習

• 0-1：集合

条件がはっきりとしているようなものの集まりを **集合** といい, このとき集められている 1 つ 1 つのものを **元** または **要素** という. 「条件がはっきりしている」というのは, 集合の元であるという条件がきっちりと明示されているということである. 集合を表す記号を表にまとめておこう. 以下の表では A と B は集合とする.

記号	日本語	意味
$a \in A$	a は集合 A に属する	a は集合 A の元である.
$a \notin A$	a は集合 A に属さない	a は集合 A の元ではない.
$A \subset B$	A は B の部分集合	A の元はすべて B にも属している.
$A \not\subset B$	A は B の部分集合ではない	$A \subset B$ ではない.
$A \subseteq B$	A は B の部分集合, または $A = B$	$A \subset B$ もしくは $A = B$ のいずれかである.
$A \subsetneq B$	A は B の真の部分集合	$A \subset B$ かつ $A \neq B$ である.
$\varnothing$	空集合	元がひとつもない集合
$A \cap B$	A と B の共通部分	A と B の両方に属するもの全体の集合
$A \cup B$	A と B 和集合	A と B の少なくとも一方には属するもの全体の集合
$\overline{A}$	A の補集合	全体集合 U のうち, A に属さないもの全体の集合

数学では, 特別な集合に対してはそれを表す記号が用意されており, 本講義でも用いるので紹介しておく.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ = 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$ = 整数全体の集合
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$ = 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$ = 実数全体の集合
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i$ は虚数単位 $\}$ = 複素数全体の集合

これらの記号を実際に板書するときは, 原則としてアルファベットの左側を二重線などで書き表すことが多い.

2 つの空でない集合 A, B が与えられたとき, A の元 a と B の元 b の組 (a, b) の全体を $A \times B$ 考えることができる.

$$A \times B = \Big\{(a,\, b) \mid a \in A,\, b \in B\Big\}$$

これを A と B の **直積集合** という. A もしくは B が空集合のときは $A \times B$ も空集合と約束する. また, $A = B$ のときは $A \times B$ を A^2 とかく. 同様にして帰納的に A^n を

$$A^n = A^{n-1} \times A$$

と定義する.

例 0-1 実数 $\mathbb{R}$ の直積集合 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は平面を表し, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は 3 次元空間を表す.

集合を元とするような集合のことを **集合族** という. 集合族の代表的な例は冪集合である. 集合 A に対して, その部分集合全体からなる集合を A の **冪集合** といい, 記号で $P(A)$ や 2^A などとかく. 集合 A が n 個の元からなる場合, 2^A は 2^n 個の元からなる.

担当：茨城大学 情報科学領域 宮本 賢伍

例 0-2 $A = \left\{1, 2, 3\right\}$ のときは

$$2^A = \left\{\varnothing, \left\{1\right\}, \left\{2\right\}, \left\{3\right\}, \left\{1, 2\right\}, \left\{1, 3\right\}, \left\{2, 3\right\}, \left\{1, 2, 3\right\}\right\}$$

である．

集合族 $\mathcal{S}$ に対して，その共通部分 $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$ と和集合 $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$ が次のように定義される．

$$\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \left\{x \mid \text{すべての } A \in \mathcal{S} \text{ に対して，} x \in A\right\}, \quad \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \left\{x \mid \text{ある } A \in \mathcal{S} \text{ に対して，} x \in A\right\}$$

$\mathcal{S} = \left\{A_1, A_2, \ldots, A_n\right\}$ のときは，

$$\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

などとかく．$\mathcal{S} = \left\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ のときは，$\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$，$\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ とかく．

集合 X とその部分集合 A に対して，$X \setminus A$ を

$$X \setminus A = \left\{x \in X \mid x \notin A\right\}$$

とおき，これを X から A への **差集合** と呼ぶ．次の集合に関する等号を **de Morgan の法則** と呼ぶ．

定理 0.1 (de Morgan の法則)**.** 集合 X とその部分集合 A, B に対して次が成り立つ．

(1) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
(2) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

• 0-2：写像

空でないような 2 つの集合 A, B に対して，A に属する各々の元に対して B の元をただ一つずつ対応させる規則を A から B への **写像** という．f が A から B への写像であって，$a \in A$ が $b \in B$ に対応するとき

$$f : A \longrightarrow B; \quad a \longmapsto b$$

のようにかく．写像 f によって，$a \in A$ が $b \in B$ に対応するとき，a は f によって b に **写される** という．A の部分集合 A' に対して，A' の元を f で写したもの全体からなる B の部分集合を $f(A')$ で表し，A' の f による **像** という．つまり，

$$f(A') := \{f(a) \in B \mid a \in A'\}$$

である．また，B の部分集合 B' に対して，$f(a) \in B'$ となるような $a \in A$ の全体からなる A の部分集合を B' の f による **逆像** といい，記号で $f^{-1}(B')$ で表す．つまり，

$$f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$$

である．写像 $f : X \longrightarrow Y$ および $g : Y \longrightarrow Z$ が与えられたとき，$x \in X$ に対して $g(f(x)) \in Z$ を対応させることにより，新たな写像を定義できる．これを $g \circ f : X \longrightarrow Z$ と表し，f と g の **合成写像** という．

写像 $f : A \longrightarrow B$ が **単射** または **1:1** であるとは，A の異なる 2 つの元が f によって B の異なる 2 つの元に写されるときをいう．

写像 $f : A \longrightarrow B$ が **全射** または **上への写像** であるとは, B に属するどの元も A に属するある元の f による像となっているときをいう．言い換えれば, $f(A) = B$ ということである.

写像 $f : A \longrightarrow B$ が単射かつ全射であるとき **全単射** という.

例 0-3　(1) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める．これは $f(1) = f(-1) = 1$ だから単射はない．また, $f(x) = -1$ となるような $x \in \mathbb{R}$ は存在しないの全射でもない.

(2) 写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $f(n) = 3n$ で定義する．$n \neq m$ のとき, $3n \neq 3m$ だから f は単射である．また, $f(n) = 1$ となるような $n \in \mathbb{Z}$ は存在しないので f は全射ではない.

(3) 写像 $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \tan x$ で定義すると, グラフを書けばわかる通り全単射である.

(4) 集合 X に対して, 写像 $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ を $\mathrm{id}_X(x) = x$ と定めたものを X 上の **恒等写像** という．恒等写像は明らかに全単射である.

全単射な写像 $f : A \longrightarrow B$ があったとする．このとき, f は全射だから任意の $y \in B$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する．f は単射であるから $y = f(x)$ となるような x はただひとつに定まる．そこで写像 $g : B \longrightarrow A$ を $y \in B$ に対して $y = f(x)$ となるような $x \in A$ をとり $g(y) = x$ と定義することができる．このように定義した写像 g を f の **逆写像** といい, f^{-1} で表す．f^{-1} は「エフインバース」と読む.

1 述語論理

• 1-1 ： 命題

数学的な **主張** とは, 数や図形などの数学的な対象について, いくつかの基本的な接続しと述語, 演算記号, 文字などを用いて記述される「曖昧さ」のない文章のことをいう．基本的な接続詞とは, 「ならば」「または」「かつ」「である」「ではない」「存在する」などの論理的な文章でよく用いられる言葉を指す．演算記号とは, 「$=$」「$<$」「$+$」などの数学でよく使われる記号を指す．数学的な主張が **命題** であるとは, その主張が正しいのかそうでないのかがはっきりと定まっているときをいう．

例 1-1 (1) 主張「平行四辺形は正方形である」は正しくないことがはっきりわかるので命題である．

(2) 主張「n が奇数ならば n^2-1 は 8 の倍数である」は正しいことがわかるので命題である．

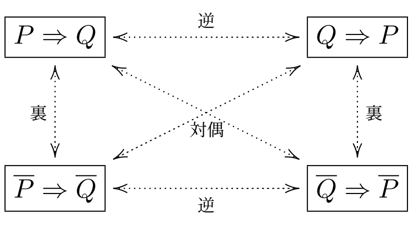
(3) 主張「10000 はとても大きい」は曖昧なので命題ではない．

(4) 主張「n は偶数であり, かつ, 100 より小さい」は n が特定されていないので, 正しいか正しくないかが定まらないから命題ではない．

さて, **例 1-1** (4) をみると, これは命題ではないが, n に具体的な値を代入すれば命題になる．例えば, $n=6$ とすれば, 「6 は偶数であり, かつ, 100 より小さい」は正しいことがわかるので命題である．このように, 何を表すのかが特定されていない文字を含む主張であって, その文字に具体的な値を代入すれば命題となるものを, その文字に関する **条件** または **述語** という．文字 x に関する条件 $P(x)$ において, x に具体的な値 a を代入して得られる命題を $P(a)$ で表す．命題 $P(a)$ が真であるとき, **a は条件 $P(x)$ を満たす** という．

2 つの条件 P, Q に対して, 命題「P ならば Q」を「$P \Longrightarrow Q$」で表す．これは, P が成り立てば, 常に Q がいつも成り立つ, ということを述べている．命題 $P \Longrightarrow Q$ が真であるとき, P は Q であるための **十分条件** といい, Q は P であるための **必要条件** であるという．必要条件かつ十分条件であるような条件を **必要十分条件** と呼ぶ．命題「$P \Longrightarrow Q$」と「$Q \Longrightarrow P$」が共に真であるとき, これを「$P \Longleftrightarrow Q$」で表す．このとき, P と Q は **同値** であるという．条件 P に対して, 「P でない」という条件を P の **否定** といい, 記号で $\overline{P}$ や $\neg P$ で表す．

ある命題「$P \Longrightarrow Q$」に対して, 命題「$Q \Longrightarrow P$」をもとの命題の **逆**, 命題「$\overline{P} \Longrightarrow \overline{Q}$」をもとの命題の **裏**, 命題「$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$」をもとの命題の **対偶** という．もとの命題とその命題の対偶の真偽は一致する．



ある命題 $P \Longrightarrow Q$ が真であることを確かめるには「証明」する必要があり, 偽であることを確かめるには「P であるが Q ではない」という例（ **反例** ）を 1 つ挙げれば良い．

例 1-2 x を実数とする．命題「$x=2 \Rightarrow x^2=4$」の逆は「$x^2=4 \Rightarrow x=2$」, 裏は「$x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$」, 対偶は「$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$」である．もとの命題とその対偶は真であり, 逆と裏は $x=-2$ が反例であり偽である．

レポート 1-1 次の主張は命題か判定しなさい．命題の場合は真偽を確かめなさい．

(1) $1+1=3$ である．

(2) 東大生は数学ができる．

(3) $2x+3y=1$ を満たす $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在する．

(4) 二等辺三角形は正三角形である．

- **1-2： 命題関数**

文字 x に関する次の条件を考えてみよう.

$$P(x) : 3x + 7 < 22$$

これ自体は命題ではないが, $P(x)$ の x に $1, \sqrt{2}, -\frac{4}{5}$ などの具体的な数 a を当てはめると命題 $P(a)$ が得られる. よって, $P(x)$ は x を変数とし, "値が命題"であるような関数とみなすことができる.

一般に, x についての条件 $P(x)$ が, 集合 X を定義域とする **命題関数** であるとは, どんな $a \in X$ についても $P(a)$ が命題となるときという. このとき, x を変数, X を命題関数 $P(x)$ の **定義域** という. 変数は x である必要はなく, 好きな文字を用いても構わない. 一方, 同じ条件であっても, 定義域がことなる命題関数は異なる命題関数と考える. 例えば, $P(x) : 3x + 7 < 22$ の定義域として, 実数全体 $\mathbb{R}$ を採用する命題関数と整数全体 $\mathbb{Z}$ を採用する命題関数は異なった命題関数である.

- **1-3： 証明の形式**

一般に, 主張を証明しようとするときにはその中間的な結果を導き, それらを利用して多段に証明することが多い. 数学的に重要な論法として次がある:

(a) 「$P \Longrightarrow Q$」が真であり, 「$Q \Longrightarrow R$」が真であるとき, 「$P \Longrightarrow R$」は真である.
(b) 「$P \Longrightarrow Q$」が真であり, P が成り立つとき, Q も成り立つ.

(a) のような証明法を **シロギズム** といい, (b) のような証明法を **モダス・ポネンス** と呼ぶ.

また, ある命題「$P \Longrightarrow Q$」を示す証明法としてよくある手法として

- 対偶「$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$」が真であることを示す.
- もし, 「$P \Longrightarrow Q$」が成り立っているのなら, P が真, Q が偽であることはないことを利用する.

後者の証明法は **背理法** と呼ばれる.

- **1-4： 鳩の巣の原理**

有限集合を定義域とする命題関数で, 「〜の中には少なくとも... となるものが 1 つは存在する」といったタイプの主張を証明する一つのテクニックに **鳩の巣の原理** と呼ばれるものがある.

定理 1.1 (鳩の巣の原理)**.** n, k は自然数であるとする. n 個の鳩の巣に, k 羽の鳩が入るとき, $k > n$ ならば, どれかの巣には 2 羽以上の鳩が入る.

例 1-3 直径が 5 の円の周および内部に 10 個の点を自由に配置すると、そのうちの少なくとも 2 点は、互いの距離が 2 より小さい. これを証明しよう. 半径 $\frac{5}{2}$ の円の内部 C に, 中心が同じで半径が 1 の円 C' を描く. この円 C' は周を含まないとしておこう. 次に, 円 C を中心角が $\frac{\pi}{4}$ となるような 8 つの扇形に分割する. これらの扇形と $C \setminus C'$ の共通部分を順に $D_1, \ldots, D_8$ とおき, これらと C' を部屋と呼ぶ. それぞれの部屋に属する任意の 2 点の距離は 2 より小さい.

今, これら 9 個の部屋の中に 10 個の点を入れるとき, 鳩の巣の原理からどこかの部屋は必ず 2 点を含む. 以上で証明は完了した.