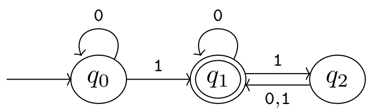
10　形式言語論 （3） –有限オートマトン–

- **10-1： 決定性有限オートマトン**

計算機とはなにか, という疑問を考えるには, その数学的モデルが必要になる．メモリ容量が著しく制限されているような計算機に対するよいモデルが「有限オートマトン」であり, これは開始状態からいくつかの遷移を経て受理状態までうつる状況を図示したものである．これは, ある文字列を「入力」したとき, その入力を処理して結果を「出力」するような装置である．その出力は, 入力した文字列を「受理する」か「拒否する」かの一方である．

有限オートマトンの定義より先に, その具体例をみてみよう．例えば, 以下の図で表されているような有限オートマトン M を考える．

M :



…………………… ①

ここで, 受理状態を二重丸で囲った．M に文字列 11010 を入力すると, M は以下のように動作する．

(1) 初期状態 q_0 から始動する．
(2) 1 を読み込み, $\delta(q_0, 1) = q_1$ なので, 状態は q_0 から q_1 に遷移する．
(3) 1 を読み込み, $\delta(q_1, 1) = q_2$ なので, 状態は q_1 から q_2 に遷移する．
(4) 0 を読み込み, $\delta(q_2, 0) = q_1$ なので, 状態は q_2 から q_1 に遷移する．
(5) 1 を読み込み, $\delta(q_1, 1) = q_2$ なので, 状態は q_1 から q_2 に遷移する．
(6) 0 を読み込み, $\delta(q_2, 0) = q_1$ なので, 状態は q_2 から q_1 に遷移する．
(7) 入力の読み込みが終了したとき, 状態は q_1 で受理状態であるから, M は文字列 11010 を受理する．

では, これを定式化して（決定性）有限オートマトンを定義する．

定義 10.1. 2 つの有限集合 K, Σ と写像 $\delta : K \times \Sigma \to K$, および $q_0 \in K$ と $F \subset K$ の 5 つ組 $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を **決定性有限オートマトン** と呼ぶ．ここで,

- K の元を **状態**,
- Σ の元を **入力アルファベット**,
- $\delta : K \times \Sigma \longrightarrow K$ を **遷移関数**,
- $q_0 \in K$ を **開始状態**,
- $F \subset K$ の元を **受理状態**

と呼ぶ．

決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ のそれぞれが具体的に与えられたとき, それを視覚的に明示することができる．

例 10-1　集合 K, Σ, F を

$$K = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad \Sigma = \{0,\ 1\}, \quad F = \{q_1\}$$

として, $\delta : K \times \Sigma \to K$ を

$$\delta(q_0, 0) = q_0, \quad \delta(q_0, 1) = q_1, \quad \delta(q_1, 0) = q_2, \quad \delta(q_1, 1) = q_1, \quad \delta(q_2, 0) = q_1, \quad \delta(q_2, 1) = q_1$$

とするような決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ は初めに与えた ① で図示される．

• 10-2：文字列の受理

定義 10.2. 決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が文字列 $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \Sigma^*$ $(w_i \in \Sigma)$ を **受理する** とは, 以下を満たす状態の列 $r_0, r_1, \ldots, r_n \in K$ が存在するときをいう.

(i) $r_0 = q_0$

(ii) $i = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して, $r_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1})$

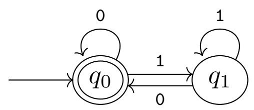
(iii) $r_n \in F$

w が M に受理しないとき, M は w を **拒否する** という. M によって受理される文字列全体を $\mathcal{T}(M)$ と表す.

例 10-2 集合 K, Σ, F を $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_0\}$ として, $\delta : K \times \Sigma \to K$ を

$$\delta(q_0, 0) = q_0, \quad \delta(q_0, 1) = q_1, \quad \delta(q_1, 0) = q_0, \quad \delta(q_1, 1) = q_1$$

とするような決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を図示すれば



となる. M の開始状態は受理状態でもあるので, 空文 ε を受理する. また, M は 0 で終わる文字列を受理し, 1 で終わる文字列を入力すると状態は q_1 となってしまうから,

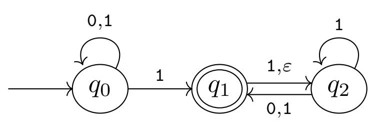
$$\mathcal{T}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w = \varepsilon \text{ であるか, } w \text{ は } 0 \text{ で終わる }\}$$

となる.

レポート 10-1 **例 10-1** で与えられた決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して, $\mathcal{T}(M)$ はどのような集合か答えよ. つまり, どのような文字列を M が受理するか答えよ.

• 10-3：非決定性有限オートマトン

「非決定性」は計算の理論に大きなインパクトを与えた有用な概念である. 決定性オートマトンでは, 遷移の各ステップで文字を読み込んだとき, 次の状態が何かであるかが決まっている. このことを **決定性** と呼ぶ. それに対して, **非決定性** とは, 各ステップにおいて, 次の状態への遷移として 0 個以上の選択が存在しうる場合をいう. そのような状況を許した有限オートマトンは非決定性有限オートマトンと呼ばれる. 例えば, 以下の図では状態 q_0 から 1 の矢印が 2 本存在し, 状態 q_1 から 0 の矢印はない.



…………………… ②

非決定性オートマトンはどのようにして処理を行うのだろうか. 例えば, ② において状態 q_0 にあるとき, 次の入力が 1 であったとする. 文字 1 を読みだしたあと, 機械はそれ自体のコピーを作成し, その後に取りうるすべての可能性を並列にたどる. また, ある機械が状態 q_1 から文字 0 を読み込んだとき, そのコピーは消失して計算過程を消去する. ある機械が状態 q_1 にたどり着くと, そこから出ていく矢印に ε が書かれている. このとき機械はコピーをつくり, 一つは状態 q_1 のままとどまり, 1 つは状態 q_2 にうつる. 文字列の読み込みが終了したとき, どれかコピーのうち 1 つでも受理状態にあるならば, 非決定性オートマトンはその文字列を受理する.

では, 非決定性有限オートマトンの定義を行おう. 違いは, 遷移関数 δ の部分と, 受理する条件の (ii) である.

定義 10.3. 2 つの有限集合 K, Σ と写像 $\delta : K \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \to 2^K$, および $q_0 \in K$ と $F \subset K$ の 5 つ組 $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を **非決定性有限オートマトン** と呼ぶ. 決定性の場合と同様に, K の元を **状態**, Σ の元を **入力アルファベット**, $\delta : K \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \longrightarrow 2^K$ を **遷移関数**, $q_0 \in K$ を **開始状態**, $F \subset K$ の元を **受理状態** と呼ぶ.

非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が文字列 $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \Sigma^*$ $(w_i \in \Sigma)$ を **受理する** とは, 以下を満たす状態の列 $r_0, r_1, \ldots, r_n \in K$ が存在するときをいう.

(i) $r_0 = q_0$
(ii) $i = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して, $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$
(iii) $r_n \in F$

w が M に受理しないとき, M は w を **拒否する** という. M によって受理される文字列全体を $\mathcal{T}(M)$ と表す.

例 10-3　集合 K, Σ, F を

$$K = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad \Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \quad F = \{q_1\}$$

として, $\delta : K \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \to 2^K$ を

$$\delta(q_0, \mathtt{0}) = \{q_0\},\ \delta(q_0, \mathtt{1}) = \{q_0, q_1\},\ \delta(q_0, \varepsilon) = \varnothing,\ \delta(q_1, \mathtt{0}) = \varnothing,\ \delta(q_1, \mathtt{1}) = \{q_2\},\ \delta(q_1, \varepsilon) = \{q_2\},$$
$$\delta(q_2, \mathtt{0}) = \{q_1\},\ \delta(q_2, \mathtt{1}) = \{q_1, q_2\},\ \delta(q_2, \varepsilon) = \varnothing$$

とするような非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ は上で与えた ② で図示される.

非決定性有限オートマトンのほうが決定性有限オートマトンよりも扱える範囲が広く感じる. しかし, 以下の定理が示すように, 驚くことに実際には 2 つの間に差がない. そこで, 決定性有限オートマトンと非決定性オートマトンを区別せずに「有限オートマトン」と呼ぶこととする.

定理 10.4. 非決定性有限オートマトン M に対して, ある決定性有限オートマトン M' で $\mathcal{T}(M) = \mathcal{T}(M')$ となるものが存在する.

証明のアイデア. 非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して, 同じ文字列を受理する決定性有限オートマトン $M' = (K', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ の構成法だけを述べておこう. （$\mathcal{T}(M) = \mathcal{T}(M')$ であることは, 簡単にわかるため, 各自でチェックせよ. ）

（M に ε と書かれた矢印がない場合）

- $K' := 2^K$, $q'_0 := \{q_0\}$
- 写像 $\delta' : K' \times \Sigma \to K'$ を $L \in K'$ と $a \in \Sigma$ に対して,

  $$\delta'(L, a) := \bigcup_{r \in L} \delta(r, a) = \{q \in K \mid \text{ある } r \in L \text{ について, } q \in \delta(r, a)\}$$

  と定義する.
- $F' := \{L \in K' \mid L \cap F \neq \varnothing\}$

このように構成された $M' = (K', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ は決定性有限オートマトンである.

（M に ε と書かれた矢印がある場合）

M の任意の状態 $q \in K$ に対して, q から ε とかかれた矢印のみを進んで到達できる状態すべての集合と q 自身を加えた集合を $\mathcal{E}(q)$ とおく. つまり,

$$\mathcal{E}(q) := \{q' \in K \mid q' \text{ は } q \text{ から 0 回以上 } \varepsilon \text{ の矢印を進んで到達できる. }\}$$

そこで, 決定性有限オートマトン $M' = (K', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ を以下で定義する.

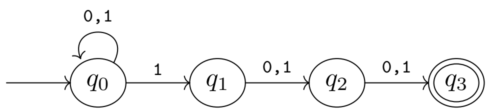
- $K' := 2^K$, $q'_0 := \mathcal{E}(q_0)$
- 写像 $\delta' : K' \times \Sigma \to K'$ を $L \in K'$ と $a \in \Sigma$ に対して,

$$\delta'(L, a) := \{q \in K \mid \text{ある } r \in L \text{ について, } q \in \mathcal{E}(\delta(r, a))\}$$

  と定義する.
- $F' := \{L \in K' \mid L \cap F \neq \varnothing\}$

以上によって定義された決定性有限オートマトンは正しく動作する. □

例 10-4　以下で与えられる非決定性オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を決定性オートマトンに変換してみよう.



この非決定性オートマトン M を正確に書くと次の通り：

$$K := \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma := \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \quad \text{開始状態：} q_0, \quad F := \{q_3\}$$

遷移関数：$\delta : K \times \Sigma \to 2^K$ は以下のように与えられる. ただし, 表の各行は状態を, 各列は入力アルファベットに対応している.

δ	ε	0	1
q_0	$\varnothing$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

そこで, これと同じ言語を受理する決定性オートマトン $M' = (K', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ は以下の形で与えられる.

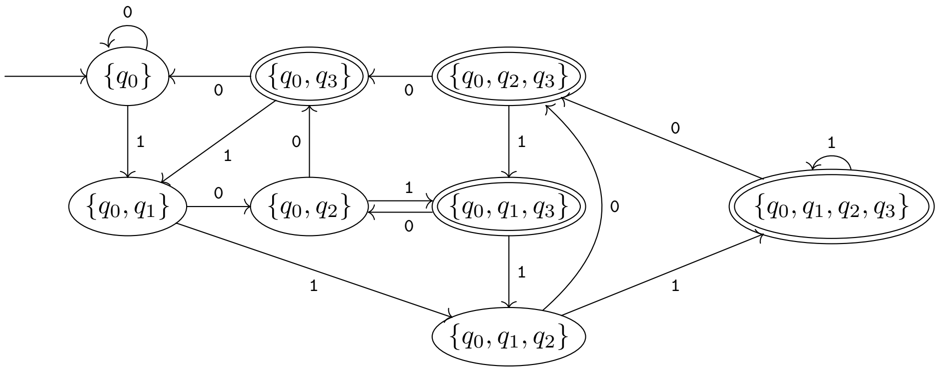
$$K' := \left\{ \begin{array}{l} \varnothing, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_3\}, \\ \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_3\}, \{q_0, q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \end{array} \right\}$$

$$F' := \{L \in K' \mid L \cap F \neq \varnothing\} = \{L \subset K \mid q_3 \in L\}$$

δ'	ε	0	1
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{q_0, q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\varnothing$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$

δ'	ε	0	1
$\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\varnothing$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\varnothing$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\varnothing$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\varnothing$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\varnothing$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

開始状態は $\{q_0\}$ であるから, 開始状態から遷移するような部分を図示すると, 決定性オートマトン M' は次のように表すことができる.



レポート 10-2　以下で定まる非決定性オートマトンと同じ言語を受理する決定性オートマトンを与えよ.